Kossuth Lajos Tudományegyetem
Természettudományi Kar

HORIZONTÁLIS LEKÉPEZÉSEK ÉS TENZORI KONNEXIÓK

Egyetemi doktori értekezés

Irta: Szilasi József

Témavezető: Tamássy Lajos egyetemi tanár

Debrecen, 1981.

TARTALOM

III. FÜGGELÉK

Ezuton fejezem ki köszönetemet professzoromnak s egyuttal témavezetőmnek, TAMÁSSY Lajos egyetemi tanárnak a disszertáció elkészitéséhez nyujtott szakmai-emberi támogatásáért.

BEVEZETÉS

A disszertáció témájához vezető történeti ut lényegében a párhuzamosság klasszikus fogalmának tágabb értelmü fejlődése. Vessünk először egy pillantást erre a fejlődésre!

- Közismert, hogy a "parallelek problémája" EUKLIDES "Elemei" - tehát kb. i.e. 300. - óta izgató és nyugtalanitó kihivásként jelentkezett a matematikusok számára s csak a probléma radikálisan uj nézőpontból való megközelitése nyomán nyiltak ki végül annak az "ujj, más világ"-nak a kapui, amelyet - egymástól függetlenül - BOLYAI János, LOBACSEVSZKIJ és GAUSS fedezett föl. E fölfedezés nyomán vált lassan világossá, hogy logikailag "lehetséges világok" egész sora létezhet s ingott meg az euklideszi térfölfogás tapasztalatot megelőző, a priori voltát hirdető kanti tanitás. A gondolkodás e fölszabaditása mintegy gyakorlati haszonnal is járt: pl. a Riemann által fölfedezett tértipus - igaz, fél évszázaddal később - lényegbevágó alkalmazásokat nyert a fizikai valóság visszatükrözésében. A történetnek ezen a pontján azonban ismét főszerepet kapott a párhuzamosság: kiderült, hogy alkalmas általánositásának hiányában lehetetlen a Riemann-tér geometriájának módszeres kiépitése. Meglehetősen /s igy utólag: meglepően/ hosszu sötétben való tapogatódzás után LEVI-CIVITA ért el frontáttörést ebben a vonatkozásban, 1917-ben. Bár a fejlődés ez időtől kezdve más területekről is egyre komolyabb impulzusokat kapott /EINSTEIN gravitációelmélete mellett gondoljunk pl. arra, hogy a 30-as esztendők már a topológia első "aranykorát" is jelentik!/, évtizedeknek kellett eltelnie addig, amig B.L. KOSZUL-nak a LEVI-CIVITA-párhuzamossághoz kapcsolódó kovariáns deriválás "index-áradatából" sikerült kihámoznia azt a néhány egyszerü axiómát, amelyek teljesen és globális módon leirják az operációt.

- Alapulvéve egy B sokaságot s $\mathcal{X}(B)$ -vel jelölve a B fölötti vektormező modulusát, a KOSZUL-féle axiómák egy $\nabla : \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(B) \longrightarrow \mathcal{X}(B),\ (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$ leképezést karakterizálnak a következő előirásokkal:

I. $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ / $f: M \to \mathbb{R}$ C^∞- függvény/;

II. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$;

III. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$;

IV. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$.

Rendelkezve egy ilyen ∇ leképezéssel, azt mondjuk, hogy B -n - vagy még inkább azt, hogy a τ_B érintőnyalábon - egy KOSZUL-konnexió van adva s a $\nabla_X Y$ vektormezőt Y X-szerinti kovariáns deriváltjának nevezzük. - A KOSZUL-féle axiómák lényegüket tekintve algebrai természetüek. E. CARTAN uttörő munkája nyomán elsősorban Ch. EHRESMANN majd Sh. KOBAYASHI vizsgálatai tárták föl, hogy egy KOSZUL-konnexió megadása geometriailag lényegében a τ_B érintőnyaláb vertikális résznyalábja egy direkt komplementumának kijelölését jelenti, bizonyos invariancia /vagy homogenitási/ követelmény előirása mellett. Ezzel - legalább három generáció erőfeszitéseinek eredményeként! - kikristályosodtak a "párhuzamosság" modern, globális elméletének, a konnexióelméletnek az alapgondolatai.

—— . ——

A klasszikus konnexióelmélet - kissé vulgárisan fogalmazva - megtanit arra, hogy miként toljunk el párhuzamosan vektort, ill. deriváljunk kovariánsan vektormezőt, sőt lehetővé teszi ezen operációk tenzormezőkre való kézenfekvő kiterjesztését, nem szól azonban arról, hogy lehetséges-e - s ha igen, miként - tenzor "párhuzamos eltolása" ill. tenzormező kovariáns deriválása direkt módon, "vektori segédlet" nélkül? - A kérdés érdekes, annál is inkább, mert egy uj, a vektori konnexióra épülőnél általánosabb geometria lehetőségét sejteti. Mind a probléma fölvetése, mind az idevonatkozó lokális jellegü vizsgálatok elinditása E.BOMPIANI nevéhez füződik /bár a II./9. alfejezetben még kicsit árnyalni fogjuk ezt a megállapitást/. A későbbiekben számos kutató kapcsolódott be ezekbe a vizsgálatokba; a hazai geométerek közül TAMÁSSY Lajos professzor. Az ő munkái hatottak inspirálólag e dolgozat témaválasztásánál is. - Kiindulópontunkat a probléma globális szemrevételezése képezte: Mi a Bompiani-féle tenzori konnexió "nagybani" jelentése s ennek megfelelően hogyan lehetne "indexmentesen" értelmezni? Miként ágyazható be elmélete a Koszul- ill. Ehresmann-Kobayashi-féle globális konnexióelméletbe? E kérdések elvi megválaszolása meglehetősen egyszerűnek bizonyult, ugyanis a tenzori konnexiók globális tárgyalásához alkalmas fogalmi kereteket képez a KOSZUL-konnexió tenzornyalábokra való átvitele vagy a tenzornyalábhoz csatolt repernyalábból történő kiindulás után a principális konnexiók elmélete. A végleges formábaöntésnél lényegében az első alternativa részletes kidolgozása mellett döntöttünk, a tenzornyaláb fogalmát a szokásosnál tágabb értelemben használva és végig törekedve a geometriai nézőpont előtérbe helyezésére.

A tenzornyaláb speciális vektornyaláb, ugyanakkor azonban a tenzornyalábra való szoritkozás bizonyos általánosabb jellegü kérdések diszkutálásánál természetellenes korlátozásként jelentkezne. Kivánatosnak bizonyult ezért a konnexióelmélet egy olyan fölépitését megadni, amely tetszőleges /de véges rangu/ vektornyalábot vesz alapul. Bár az irodalom ebben a tekintetben bőven szolgál anyaggal, vizsgálataink során számos tisztázandó kérdés fölbukkant, s ugy érezzük, hogy tárgyalásunk - talán éppen a minél teljesebb áttekintés igényéből fakadóan! - tényleges ujdonságokat is fölmutat. A konkrétumok felsorakoztatása előtt csupán annyit jelzünk, hogy szinte általános tünetként észleltük a témát globálisan megközelitő munkákban a lokális konzekvenciák rendszeres leszármaztatásának hiányát - következetesen törekedtünk hát e "fehér folt" eltüntetésére.

—— . ——

Rátérünk a dolgozat szerkezetének és tartalmának részletesebb ismertetésére. - Az anyagot három fejezetben rendeztük el, ezek mindegyikét alfejezetekre tagoltuk.

A definiciókat és tételjellegü kijelentéseket sorszámoztuk, a számozást fejezetenként ujrakezdve /a hivatkozások ennek megfelelően történtek/. A tételjellegü kijelentések növekvő "rang" szerint: lemmák, állitások és "tényleges" tételek, az utóbbiakban tehát a legfontosabbaknak tekintett eredményeket foglaltuk össze. Ez a szigoru distinkció azonban nem zárja ki, hogy állitások /vagy akár lemmák/ is hordozzanak önmagukban is érdekes tényeket! Amennyiben ismert állitást bizonyitás követ, ugy az többnyire - részben vagy teljesen - önálló munka terméke; a kivételekre külön felhivjuk a figyelmet. A bizonyitások végét a ⊘ szimbólum jelzi.

- Bőségesen és többféle funkcióval szerepeltetünk megjegyzéseket. Ezek matematikai jellegü észrevételek mellett rámutatnak történeti vonatkozásokra, eredményeink más, ismert eredményekkel való kapcsolataira, előre- és visszautalásokat tartalmaznak, stb. ...

Törekedtünk arra, hogy dolgozatunk "self-contained" legyen kb. olyan mértékben, hogy az érdeklődő magasabb éves egyetemi hallgató különösebb nehézség nélkül olvashassa. /Erre inspirált a vonatkozó magyar nyelvü szakirodalom szinte teljes hiánya is!/ E törekvés kettős terjedelemnövelő hatással járt: a nagyobb világosság érdekében egyrészt a szokásosnál jobban részleteztük a bizonyitásokat, számitásokat, másrészt beiktattuk a kitünő [GHV] monográfia anyagára épitő I. fejezetet, amely szó- és jelöléshasználatot rögzitő funkciója mellett elsősorban a fontosabb előismeretek összefoglalása. Némi önállóságot azonban ennek a fejezetnek is kölcsönöz az a néhány technikai jellegü eredmény /ilyen pl. az I./12. állitás/, amely már a későbbi tárgyalás explicit előkészitését jelenti.

Az anyag gerincét a II. fejezet tartalmazza, speciálisan ennek utolsó alfejezete lett kifejezetten a tenzori konnexióknak szentelve. A konnexióelmélet fölépitésénél vezérelvként a direkt fölbontás gondolata szolgált, ezt technikailag az un. horizontális leképezés segitségével realizáltuk. A KOSZUL-konnexió többszempontu általánositásához a horizontális leképezés $\longrightarrow$ vertikális leképezés $\longrightarrow$ konnexióleképezés $\longrightarrow$ általános konnexió ut vezetett; innen talán a konnexióleképezés II.4. alfejezetben adott tárgyalását emelhetjük ki. A görbületelmélet a vektornyaláb totálterének érintőnyalábján ható endomorfizmusok II.5. alfejezetbeli vizsgálatán alapul és az integrálhatóságot átfogóan leiró 1. tételben kulminál. A fenti I.-IV. KOSZUL-axiómáknak megfelelő tulajdonságokkal rendelkező lineáris konnexióhoz a homogenitási feltétel előirásával jutunk, amelyet több szempontból is jellemez a 2. tétel. Nemlineáris konnexiót a homogenitási feltétel alkalmas gyöngitése eredményez.
- Mindezen vizsgálatok közben az érintőnyaláb differenciálgeometriájából ismert számos tényt sikerült tetszőleges vektornyalábra általánositani /ld. pl. II.16., 19., 28. állitás/. Ilyen jellegü általánositásokat tartalmaz a törzsanyagot kiegészitő Függelék első két alfejezete is. A tenzori konnexiókkal foglalkozó II.9. pontból a tenzori konnexió vektoriakra való dekomponálhatóságának általános fogalmát s az erre nyert kritériumot /3. tétel/ emeljük ki, amelynek lokális alakja

speciális esetekként kiadja az összes ismert eredményeket. A Függelék 3. alfejezete mintegy előhang a 2. tipusu, Ehresmann-Kobayashi-féle tárgyaláshoz, közvetlen célja pedig a tenzornyalábhoz csatolt repernyaláb redukciójára vonatkozó tétel igazolása.

Az Irodalomjegyzékban különválasztottuk a könyveket és a cikkeket s rájuk a szövegközi utalások is eltérő módon történtek: cikket szerző neve és évszám jelöl, könyvet - szögletes zárójelbe téve - a szerző neve ill. névkezdőbetű/k/.

A tanulmányozott dolgozatok közül kiemelendő DOMBROWSKI /1962/, VILMS /1968/ és GRIFONE /1972/; ezek különösen hasznos impulzusokkal járultak hozzá a II. fejezet megirásához.

A könnyebb tájékozódás érdekében a tartalomjegyzékben azt is föltüntettük, hogy az egyes alfejezetek milyen sorszámu definiciót ill. lemmát, állitást, tételt tartalmaznak.

— . —

Bizonyos foku kompaktságuk dacára sem érezzük, hogy az elvégzett vizsgálatok "lezártak" volna valamit, ellenkezőleg: ugy véljük, csupán alkalmas kiindulópontot jelentenek további problémák fölgöngyölitéséhez. Ilyen további kutatási téma lehet az areal terek /affin/ konnexióelméletének módszeres kidolgozása, a munkánk során egyáltalán nem érintett metrikus vonatkozások föltérképezése, a repernyalábba történő horizontális lift általunk vizsgált horizontális lifttel való kapcsolatának tanulmányozása - hogy csak néhányat emlitsünk a legaktuálisabbak közül.

ABSTRACT

The starting point of the thesis was the definition and investigation of a global concept of BOMPIANI'S tensorial connection. Striving to a systematic treatment we give a sufficiently complete description of the theory of connections. Our geometric description is based on vector bundles and posesses some remarkable features.

The main results are summarized in four theorems.
- Let $\xi = (E, \pi, B, F)$ be a vector bundle of finite rank, and

$$0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{\iota} \tau_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0 \qquad /*/$$

a short exact sequence of vector bundles / τ_E and τ_B are tangent bundles of E and B resp., V_ξ is the vertical subbundle of τ_E /. The splits $\mathcal{H}: \pi^*(\tau_B) \longrightarrow \tau_E$ of the sequence /*/ are called <u>horizontal maps</u>. To each horizontal map there corresponds a unique direct decomposition $\tau_E = V_\xi \oplus H_\xi$. Geometrically, our discussion is based upon this direct decomposition. The first Theorem gives nine equivalents of the integrability of $\mathcal{H}$ in terms of <u>horizontal projection</u> $h := \mathcal{H} \circ \widetilde{d\pi}$, <u>vertical projection</u> $v := \iota_{\tau_E} - h$, <u>almost product structure</u> $P := 2h - \iota_{\tau_E}$, and <u>curvature tensor field</u> $\mathcal{R} := -\frac{1}{2}[h, h]$ /where $[h,h]$ is the Nijenhuis-torsion of h /.

The <u>general connection</u> induced by $\mathcal{H}$ is the mapping

$$\nabla : \mathrm{Sec}\,\xi \longrightarrow A^1(B; \xi), \; \sigma \longmapsto \nabla\sigma := K \circ d\sigma,$$

where $\mathrm{Sec}\,\xi$ is the $C^\infty(B)$ -module of sections of ξ ,

$A^1(B;\xi)$ is the $C^\infty(B)$ -module of the ξ -valued 1-forms on B , and K is the <u>connection mapping</u> belonging to $\mathcal{H}$ /Def.II.8./. ∇ is called a <u>linear connection</u>, if it satisfies the following homogeneity condition:

$$\forall\ t \in \mathbb{R}:\ \underline{d\mu_t \circ h = h \circ d\mu_t}\ \left(\mu_t : \xi \longrightarrow \xi,\ z \in E \longmapsto \mu_t(z) := tz\right)$$

The second Theorem states four equivalents of the homogeneity condition.

The concept of the general, linear, and non-linear <u>tensorial connection</u> is introduced as the corresponding connection induced by a horizontal map given on a tensor bundle. /A <u>nonlinear connection</u> is derived by a certain weakening of a linear connection./ The <u>decomposition</u> of a tensorial connection into vectorial ones formulated globally is in Def.II.22.. The third Theorem provides an important /but simple/ criterium of decomposability. As special cases, all the known results are included in the local form of this criterium. The last theorem of the thesis /which is placed in the Appendix/ asserts that the frame bundle associated with a tensor bundle reduces to a subgroup of its structure group.

A number of results generalize facts known from the differential geometry on tangent bundles. Throughout the thesis we also point out the local aspects, which are generally omitted by the literature of global differential geometry.

I. ELŐZMÉNYEK

0. Általános konvenciók

0.1. Dolgozatunkban többnyire a legszokásosabbnak mondható logikai és halmazelméleti formalizmust használjuk. Ezzel kapcsolatban nincs szükség külön kommentárra, föl kell hivnunk azonban a figyelmet néhány olyan speciálitásra, amelyeket illetően a gyakorlat nem alakitott ki "közmegegyezést". - Adott $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta, \dots, \mathcal{U}_\lambda$ halmazok esetén metszetük jelölésére az $\mathcal{U}_{\alpha\beta\dots\lambda}$ rövidítést alkalmazzuk; a természetes ill. a valós számok halmazát $\mathbb{N}$ -nel ill. $\mathbb{R}$ -rel jelöljük, előbbibe a zérust is beleértve. A 0 és - lényegében kicserélhető módon - az σ szimbólum nagyon sokféle értelemben fog szerepelni: $\mathbb{R}$ nullaeleme mellett jelent majd zérusvektort, - vektorteret, - vektornyalábot, - leképezést, stb... . Bár ez a többértelmüség semmilyen félreértést nem von maga után, bizonyos esetekben mégis célszerü pl. a különböző vektorterek zérusvektorát eltérően jelölni. Erre sor is kerül, ha egy vektornyaláb fibrumainak zérusvektorairól lesz szó. - Tetszőleges X halmaz identikus leképezését végig ι_X -szel, olykor egyszerüen csak ι -val, leképezések kompozicióját " $\circ$ "-rel jelöljük. Az inkluzió-leképezés szimbóluma általában i lesz /tehát ha $H \subset X$, akkor $i : H \to X$,

$h \longmapsto i(h) \doteq h$ /, mig az n -tényezős Descartes-szorzat i -ik tényezőjére való természetes projekciót pr_i fogja jelölni / $i = 1, \ldots, n$ /. Az $\mathbb{R}$ -be történő leképezéseket rendszerint függvényekként emlitjük.

0.2. Differenciálgeometriáról lévén szó, a lokális leirás formai egyszerüsitése célszerüvé tesz bizonyos összegzési konvenciókat.

- A következőkben állapodunk meg:

1/ kis latin indexek / $i, j, k, \ldots$ / 1 -től n -ig;

2/ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ görög indexek 1 -től r -ig; $\lambda, \mu, \vartheta, \ldots$ indexek 1 -től s -ig;

3/ nagy latin indexek / $A, B, C, \ldots$ / 1 -től $(n+r)$-ig futnak / $n, r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ /.

$a^{\alpha} b_{n+\alpha}$ alaku kifejezés - rögzitettnek feltételezett $n \in \mathbb{N}$ mellett - $a^1 b_{n+1} + \cdots + a^r b_{n+r}$ összeget rövidit, $a^{\lambda} b_{n+\lambda} \doteq a^1 b_{n+1} + \cdots + a^s b_{n+s}$ - egyébként az EINSTEIN-féle összegzési konvenciót a szokásos formában alkalmazzuk.

1. Lineáris konstrukciók

1.1. Vektorterek és lineáris leképezések

Ha E és F egy Γ test fölötti vektortér, akkor az $E \longrightarrow F$ lineáris leképezések vektorterét $L(E; F)$ -fel, speciálisan E lineáris automorfizmusainak csoportját

- a kialakult gyakorlatot követve - $GL(E)$ -vel jelöljük. Az $E \longrightarrow \Gamma$ lineáris függvények vektorterét E konjugált tereként fogjuk emliteni s rá az $L(E)$ jelölést használjuk / Γ kiirásának mellőzése nem vezet félreértésre/.

Könnyen látható, hogy tetszőleges $\varphi \in L(E; F)$ esetén a

$$\varphi^* : L(F) \longrightarrow L(E), \; f \in L(F) \longrightarrow \varphi^*(f) \doteq f \circ \varphi \in L(E)$$

leképezés lineáris leképezése $L(F)$ -nek $L(E)$ -be; ezt φ duálisának hivjuk. - $\mathrm{Ker}\,\varphi$ -vel ill. $\mathrm{Im}\,\varphi$ -vel jelöljük végül egy $\varphi : E \longrightarrow F$ lineáris leképezés nullterét ill. képterét.

1. definició Legyen $\varphi \in L(E; F)$, $\psi \in L(F; H)$. - Azt mondjuk, hogy az $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} H$ "sorozat" F -nél egzakt, ha $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$. Egy

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 0 \qquad /*/$$

alaku, E -nél, F -nél és H -nál egyaránt egzakt sorozatot rövid egzakt sorozatnak nevezünk. A

$$\chi : H \longrightarrow F$$

lineáris leképezést a /*/ rövid egzakt sorozat egy levágásának /split/ hivjuk, ha teljesül rá, hogy

$$\psi \circ \chi = \iota_H .$$

Megadva a χ levágást,

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \underset{\chi}{\overset{\psi}{\rightleftarrows}} H \longrightarrow 0$$

levágott /split/ rövid egzakt sorozatról szólunk.

- Fölhivjuk a figyelmet néhány, az értelmezés alapján meglehetős közvetlenséggel adódó, de fontos tényre.

1/ Ha $0 \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} F$ E -nél egzakt sorozat, akkor $\mathrm{Ker}\,\psi = \mathrm{Im}\,\varphi = \{\sigma\}$ folytán ψ injektiv. Megforditva, ha $0 \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} F$ olyan sorozat, amelynél ψ injektiv, akkor $\mathrm{Im}\,\varphi = \{\sigma\} = \mathrm{Ker}\,\psi$ miatt a sorozat E -nél egzakt.

Amennyiben egy $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} 0$ alaku sorozat egzakt F -nél, ugy a definició szerint $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$, s mivel most speciálisan $\mathrm{Ker}\,\psi = F$, $\mathrm{Im}\,\varphi = F$ adódik, ami azt jelenti, hogy φ szürjektiv. Megforditva, ha az $E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} 0$ sorozatnál φ szürjektiv leképezés, akkor a sorozat F -nél egzakt.

Az elmondottakból világos, hogy

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} H \longrightarrow 0$$

<u>rövid egzakt sorozat</u> esetén φ injektiv, ψ szürjektiv lineáris leképezés /az első és utolsó, nem jelzett leképezés pedig a σ -leképezés/.

2/ Ha E_1 altere E -nek s E/E_1 jelöli az E vektortér E_1 szerinti faktorterét, akkor

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/E_1 \longrightarrow 0$$

/ahol i az inkluzió, π a kanonikus projekció/ rövid egzakt sorozat. E megállapitás megforditásaként egyszerüen kimutatható, hogy <u>lényegében</u> a most mondott az egyedüli példa rövid egzakt sorozatra.

Egy igen lényeges egzisztencia-tényt rögzitünk végül:

1. állitás Minden rövid egzakt sorozatnak létezik levágása.

Bizonyitás Ld. pl. [Greub 1.], p. 48. ⊘

1.2. Vektorterek tenzori szorzata

A tenzori szorzat számos ekvivalens értelmezése közül a mai izlésnek talán leginkább megfelelőre emlékeztetünk e helyen, az egyszerüség kedvéért két vektortér tenzori szorzatának bevezetésére korlátozódva. Ezt a könnyitést - mivel nem támaszt akadályt a viszonyok lényeges jegyeinek fölfedésében - egy-két kivételtől eltekintve egész tárgyalásunk során alkalmazni fogjuk. A "kivételes esetekre" a kéttényezős szituációban megismert tulajdonságokat értelemszerüen viszszük át.

2. definició Legyen E, F és T ugyanazon test fölötti vektortér,

$$\otimes : E \times F \longrightarrow T, \quad (x,y) \longmapsto \otimes(x,y) \doteq x \otimes y$$

pedig bilineáris leképezés. - Azt mondjuk, hogy a $\otimes$ leképezés rendelkezik az univerzális tulajdonsággal, ha teljesül az alábbi két feltétel:

$\otimes_1$ Az $x \otimes y$ vektorok generálják a T vektorteret.

$\otimes_2$ Ha $\varphi : E \times F \longrightarrow V$ bilineáris leképezés a tetszőleges V vektortérbe, akkor létezik olyan $f : T \longrightarrow V$ lineáris leképezés, hogy az

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\otimes"'] & V \\ T \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

diagram kommutativ, azaz hogy

$$\forall (x,y) \in E \times F : \quad \underline{\varphi(x,y) = f(x \otimes y)}.$$

Ebben az esetben a $(T, \otimes)$ párt E és F _tenzori szorzatának_ nevezzük, T -re az $E \otimes F$ jelölést alkalmazzuk s elemeit _tenzor_oknak hivjuk. Speciálisan az

$$x \otimes y \quad ; \quad x \in E \; , \; y \in F$$

alakban fölirható tenzorokat _dekomponálható tenzor_okként emlitjük.

Megjegyzések

1/ Hangsulyoznunk kell, hogy a "tenzor" szónak a jelen definició alapján rögzitett használata egyrészt - miként azt már e szakasz bevezető soraiban is jeleztük - leszükitett értelmü, másrészt viszont általánosabb a klasszikus differenciálgeometriai irodalomból megszokottnál, ott ti. F gyanánt speciálisan pl. maga E szerepel - ilyenkor szólnak "kétszer kontravariáns tenzor"-ről -, vagy $F \doteq L(E)$, stb... .

2/ Az értelmezés kiterjesztése több /de véges sok/ vektortérre természetesen nem jár nehézséggel, a későbbiekben /1.3. pont/ szerepelni is fog az E vektortér $\otimes^p E \doteq \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p}$, un. _$p$ -ik tenzori hatványa_, ahol $p \in \mathbb{N}$ tetszőleges, azzal a megállapodással, hogy $\otimes^0 E \doteq \Gamma$, $\otimes^1 E \doteq E$.

3/ Ha R kommutativ gyürü, M és N pedig R -modulusok, akkor $M \otimes_R N$ -nel jelölt tenzori szorzatuk analóg módon definiálható. Ezzel kapcsolatban - bár a modulusok tenzori szorzata legalább olyan fontos szerepet játszik tárgyalásunk során, mint a vektortereké - egyáltalán nem térhetünk ki részletekre.

2. állitás Megtartva a 2. definició jelöléseit, érvényesek a következők:

a/ A $\otimes_1$ és $\otimes_2$ feltétel ekvivalens az alábbi egyetlen feltétellel:

$\otimes$ Ha $\varphi: E \times F \longrightarrow V$ bilineáris leképezés a tetszőleges V vektortérbe, akkor egyértelmüen létezik olyan $f: T \longrightarrow V$ lineáris leképezés, amely az értelmezésbeli diagramot kommutativvá teszi.

b/ Bármely két /ugyanazon test fölötti/ E és F vektortér esetén létezik az $(E \otimes F, \otimes)$ tenzori szorzat s itt az $E \otimes F$ vektortér izomorfia erejéig egyértelmüen meghatározott.

c/ Ha $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ ill. $(b_\beta)_{\beta \in J}$ - ahol most I és J tetszőleges indexhalmaz - bázisa az E ill. F vektortérnek, akkor

$$(a_\alpha \otimes b_\beta)_{\alpha \in I, \beta \in J}$$

bázisa $E \otimes F$ -nek; speciálisan $\dim E = r$, $\dim F = s$ esetén $\dim (E \otimes F) = rs$ / $r, s \in \mathbb{N}$ / és ha ekkor $\varphi: E \times F \longrightarrow V$ bilineáris leképezés az rs -dimenziós V vektortérbe, ugy a $\otimes_1$ és $\otimes_2$ feltétel egyenértékü.

Bizonyitás. Ld. [Greub 2.], Ch. 1.⊘

Megjegyzések

1/ Az állitás b/ része alapján a továbbiakban "megengedhető pontatlansággal" egyszerüen az $E\otimes F$ vektorteret fogjuk a tenzori szorzat elnevezéssel illetni.

2/ Ha $e_1,\dots,e_r$ és $f_1,\dots,f_s$ bázisa az E ill. F vektortérnek és

$$z = \zeta^{\alpha\lambda} e_\alpha \otimes f_\lambda \in E\otimes F\,,$$

akkor a $\zeta_{\alpha\lambda}$ koefficienseket a z tenzor alapulvett bázispárra vonatkozó komponenseinek, röviden tenzorkomponenseknek hivjuk.

Megállapodás A következőkben - ha mást nem mondunk - vektortéren mindig véges dimenzióju valós vektorteret értünk.

—— . ——

Alpontunk hátralevő részében néhány olyan egyszerübb tényt tekintünk át a tenzori szorzattal kapcsolatban, amelyekre a későbbiekben explicite hivatkoznunk kell.

3. állitás Ha E és F /véges dimenzióju, valós/ vektorterek, akkor

$$L(E\otimes F) = L(E)\otimes L(F).$$

Bizonyitás. Ld. pl. [Greub 2.] , p. 36.⊘

Mielőtt továbbmennénk, egy rendkivül természetes és egyuttal igen fontosnak bizonyuló konstrukciót ismertetünk.
- Tegyük fel, hogy

$$\varphi \in L(E;E'), \quad \psi \in L(F;F')$$

és tetszőleges $x \otimes y \in E \otimes F$ esetén legyen

$$\varphi \otimes \psi(x \otimes y) \doteq \varphi(x) \otimes \psi(y).$$

Lineáris kiterjesztéssel

$$\varphi \otimes \psi \in L(E \otimes F; E' \otimes F');$$

ezt a lineáris leképezést φ és ψ tenzori szorzatának hivjuk. Speciálisan lineáris függvények esetén, azaz ha $f \in L(E)$, $g \in L(F)$, a tenzori szorzatot az

$$f \otimes g(x \otimes y) = f(x)g(y)$$

előirás adja, s kimutatható, hogy $f \otimes g \in L(E \otimes F) \equiv L(E) \otimes L(F)$.
- A most elmondottak és a megelőző állitás alapján egyszerü számolással igazolható a

4. állitás $\quad \forall \ \varphi \in L(E;E'), \ \psi \in L(F;F')$:

$$(\varphi \otimes \psi)^* = \varphi^* \otimes \psi^*.$$

5. állitás Alapulvéve az E és F vektorteret, legyen

$$GL(E) \otimes GL(F) \doteq \{\varphi \otimes \psi \mid \varphi \in GL(E), \psi \in GL(F)\}.$$

Ekkor a $GL(E) \otimes GL(F)$ halmaz a

$$(\varphi \otimes \psi) * (\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi}) \doteq \varphi \cdot \bar{\varphi} \otimes \psi \cdot \bar{\psi}$$

előirás szerint megadott $*$ müvelettel csoport, mégpedig a $GL(E \otimes F)$ lineáris csoportnak részcsoportja.

<u>Bizonyitás</u>. $\iota_E \otimes \iota_F$ egységelem a $*$ müveletre nézve, $\varphi^{-1} \otimes \psi^{-1}$ pedig inverze a $\varphi \otimes \psi$ elemnek; az asszociativitás teljesülését triviális számolás mutatja. Ilymódon $GL(E) \otimes GL(F)$ <u>csoport</u>. Annak igazolásához, hogy e csoport <u>részcsoportja</u> $GL(E \otimes F)$ -nek, elegendő annyit belátni, hogy a $GL(E \otimes F)$ -beli müvelet - a változatlanul "$\circ$"-rel jelölt kompozició - $GL(E) \otimes GL(F)$ -re való leszükitése éppen a $*$ müvelet. Ez szintén egyszerü számolással adódik:

$$\forall\ x \in E,\ y \in F:\ (\varphi \otimes \psi \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\psi})(x \otimes y) =$$
$$= \varphi \otimes \psi[\bar{\varphi} \otimes \bar{\psi}(x \otimes y)] = \varphi \otimes \psi[\bar{\varphi}(x) \otimes \bar{\psi}(y)] =$$
$$= \varphi[\bar{\varphi}(x)] \otimes \psi[\bar{\psi}(y)] = [\varphi \circ \bar{\varphi}(x)] \otimes [\psi \circ \bar{\psi}(y)] =$$
$$= \varphi \circ \bar{\varphi} \otimes \psi \circ \bar{\psi}(x \otimes y) = [(\varphi \otimes \bar{\varphi}) * (\psi \otimes \bar{\psi})](x \otimes y). \quad ◍$$

<u>Megjegyzés</u> $\varphi \otimes \psi$ definiciója automatikusan biztositja, hogy lineáris leképezések tenzori szorzata dekomponálható tenzort dekomponálható tenzorba visz át. Differenciálgeometriai vonatkozásaiban is igen jelentős, de meglehetősen nehéz a forditott kérdés: ha adva van egy olyan $\Phi \in L(E \otimes F; E \otimes F)$ leképezés, amely nemzérő dekomponálható tenzorhoz nemzérő dekomponálható tenzort rendel, akkor mit mondhatunk Φ -ről? - A választ MARCUS-MOYLS /1959/ adja meg: Amennyiben E és F <u>algebrailag zárt</u> test fölötti véges dimenziós vektortér, ugy

1/ <u>$\dim E \neq \dim F$</u> esetén $\Phi \in GL(E) \otimes GL(F)$;

2/ a <u>$\dim E = \dim F$</u> esetben vagy szintén $\Phi \in GL(E)\otimes GL(F)$, vagy pedig van olyan $\chi : E \longrightarrow F$ invertálható lineáris leképezés, hogy

$$\Phi = \tau\left(\chi \circ \varphi \otimes \chi^{-1} \circ \psi\right),$$

ahol $\varphi \in GL(E)$, $\psi \in GL(F)$ és

$$\tau : F\otimes E \longrightarrow E\otimes F, \quad y\otimes x \longmapsto \tau(y\otimes x) \doteq x\otimes y.$$

—— . ——

Függelékbeli alkalmazása miatt érdekes a

<u>6. állitás</u> Ha E és F egyaránt r -dimenziós vektortér, $e_1, \dots, e_r$ s $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ egy-egy tetszőlegesen rögzitett bázisa E -nek,

$$\varphi : E \longrightarrow F \quad \text{és} \quad \psi : E \longrightarrow F$$

pedig lineáris izomorfizmusok, akkor

$$\varphi\otimes\psi : E\otimes E \longrightarrow F\otimes F$$

ugyancsak lineáris izomorfizmus, s a

$$\varphi\otimes\psi \longmapsto \left\{ \varphi\otimes\psi\,(e_\alpha\otimes\bar{e}_\beta) \mid \alpha,\beta = 1,\dots,r \right\}$$

hozzárendelés <u>bijekció</u> a $\varphi\otimes\psi \in L\left(E\otimes E\,;\,F\otimes F\right)$ <u>izomorfizmusok</u> és $F\otimes F$ azon bázisai között, amelyeket <u>dekomponálható</u> tenzorok alkotnak.

<u>Bizonyitás</u>. A $\varphi\otimes\psi$ leképezés izomorfizmus-volta világos abból, hogy $\varphi^{-1}\otimes\psi^{-1}$ inverze $\varphi\otimes\psi$ -nek. - A 2./c/ állitás miatt a $\varphi\otimes\psi\,(e_\alpha\otimes\bar{e}_\beta) = \varphi(e_\alpha)\otimes\psi(e_\beta)$ tenzorok bázisát alkotják $F\otimes F$ -nek /hiszen a föltevés miatt $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_r)$ és $\psi(\bar{e}_1), \dots, \psi(\bar{e}_r)$ bázisa F -nek/. Ha az

állitásban szereplő hozzárendelésnél a $\varphi\otimes\psi$ és a $\overline{\varphi}\otimes\overline{\psi}$ izomorfizmushoz $F\otimes F$ ugyanazon bázisa tartozik, akkor - esetleges átindexezés után -

$$\varphi\otimes\psi\,(e_\alpha\otimes\bar{e}_\beta)=\overline{\varphi}\otimes\overline{\psi}\,(e_\alpha\otimes\bar{e}_\beta)\ ;\quad \alpha,\beta=1,\dots,r$$

irható, amiből $\varphi\otimes\psi=\overline{\varphi}\otimes\overline{\psi}$ következik - tehát a hozzárendelés injektiv. Annak belátására, hogy szürjektiv is, tekintsük $F\otimes F$ egy tetszőleges, dekomponálható tenzorok alkotta

$$f_\alpha\otimes\bar{f}_\beta\quad ;\quad \alpha,\beta=1,\dots,r$$

bázisát. Itt $f_1,\dots,f_r$ és $\bar{f}_1,\dots,\bar{f}_r$ egyaránt bázisa F -nek, mert ellenkező esetben nem csupa nulla együtthatóval pl. $a^\alpha f_\alpha=0$ lenne irható és az

$$a^\alpha(f_\alpha\otimes\bar{f}_1)+0(f_1\otimes f_2)+\dots+0(f_r\otimes f_2)+\dots+$$
$$+\,0(f_1\otimes\bar{f}_r)+\dots+0(f_r\otimes\bar{f}_r)$$

lineáris kombináció $F\otimes F$ bázisvektoraiból állitaná elő nemtriviális módon a zérusvektort. Igy az következik, hogy a

$$\varphi(e_\alpha)\doteq f_\alpha\ ,\quad \psi(\bar{e}_\alpha)\doteq\bar{f}_\alpha\qquad(\alpha=1,\dots,r)$$

előirás által definiált $\varphi: E\to F$ és $\psi: E\to F$ lineáris leképezés izomorfizmus E és F között, világos továbbá, hogy a $\varphi\otimes\psi$ lineáris izomorfizmusnak az állitásbeli hozzárendelésnél $F\otimes F$ megadott bázisa felel meg. ⊘

1.3. Külső algebra

A| Most és a következőkben végig S_p -vel fogjuk jelölni az

$$\{1,2,\dots,p\}$$

halmaz összes permutációinak csoportját. Ha $\tau \in \mathcal{S}_p$, akkor megállapodás szerint

$$\varepsilon_\tau = \begin{cases} 1, & \text{ha } \tau \text{ páros permutáció;} \\ -1, & \text{ha } \tau \text{ páratlan permutáció.} \end{cases}$$

Áttekintésünk során egy nullkarakterisztikáju Γ test fölötti tetszőleges E vektorteret veszünk alapul /nem kötjük ki tehát, hogy $\Gamma = \mathbb{R}$ legyen és dimenzionalitás megszoritással sem élünk/. Emlékeztetünk rá, hogy egy

$$\varphi : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p} \longrightarrow F$$

p -lineáris leképezés /F szintén a Γ test fölötti vektortér/ per definitionem <u>ferdeszimmetrikus,</u> ha

$$\forall\, \tau \in \mathcal{S}_p : \quad \tau\varphi = \varepsilon_\tau \varphi\,,$$

ahol

$$\tau\varphi(x_1, \ldots, x_p) \doteq \varphi(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)})$$
$$/x_1, \ldots, x_p \in E/.$$

Amennyiben $\varphi : E \times \cdots \times E \to F$ egy tetszőleges p -lineáris leképezés, ugy

$$\mathfrak{A}(\varphi) \doteq \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathcal{S}_p} \varepsilon_\tau (\tau\varphi)$$

könnyen ellenőrizhető módon <u>ferdeszimmetrikus</u> p -lineáris leképezés. - Az $\mathfrak{A} : \varphi \longmapsto \mathfrak{A}(\varphi)$ leképezést a <u>ferdeszimmetrizáció operátor</u>ának hivjuk.

<u>B]</u> <u>3. definició</u> Legyen $p \geq 2 \in \mathbb{N}$, A a Γ test fölötti vektortér és

$$\Lambda^p : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{p} \longrightarrow A$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezés. - Λ^p rendelkezik a ferdeszimmetrikus leképezésekre vonatkozó <u>univerzális tulajdonsággal</u>, ha eleget tesz a következő két feltételnek

<u>Λ_1</u> Im $\Lambda^p = A$, vagyis a $\Lambda^p(x_1,\dots,x_p)$ elemek generálják az A vektorteret.

<u>Λ_2</u> Ha $\varphi : \underbrace{E\times\dots\times E}_{p} \to F$ egy tetszőleges F vektortérbe való ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezés, akkor létezik olyan $f \in L(A; F)$, amely az

$$\begin{tikzcd} \underbrace{E\times\cdots\times E}_{p} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & F \\ & A \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

diagramot <u>kommutatívvá</u> teszi.

Ebben az esetben az (A, Λ^p) párt, vagy egyszerűen az A vektorteret /amely izomorfia erejéig egyértelmüen meghatározott/ az E vektortér <u>p -ik külső hatványának</u> nevezzük és az $A = \Lambda^p E$ jelölést használjuk. $\Lambda^p E$ elemeit <u>p -vektorokként</u> is emlitjük; ha $p = 1$ ill. $p = 0$, akkor

$$\Lambda^p E \doteq E \quad \text{ill.} \quad \Lambda^p E \doteq \Gamma.$$

<u>Megjegyzés</u> A 2./a/ állitás analogonjaként kimutatható, hogy Λ_1 és Λ_2 helyettesithető egyetlen feltétellel, amely a definicióban szereplő diagramot kommutatívvá tevő $f \in L(A; E)$ <u>egyértelmü</u> létezését irja elő.

———.———

Röviden megvizsgáljuk a $\Lambda^p E$ p-ik külső hatvány egzisztenciájának kérdését s egyben rámutatunk a $\otimes^p E$ p-ik tenzor-hatvánnyal való kapcsolatára. - Tetszőleges $\tau \in S_p$ esetén jelölje ugyancsak τ azt a

$$\otimes^p E \longrightarrow \otimes^p E$$

lineáris automorfizmust, amelyet a

$$\tau(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) \doteq x_{\tau^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\tau^{-1}(p)}$$

utasitás ad meg. Tekintsük $\otimes^p E$ azon $N^p(E)$ alterét, amelyet olyan

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_p$$

szorzatok generálnak, ahol legalább egy $1 \leqq i \neq j \leqq p$ indexpár esetén $x_i = x_j$. Egyszerüen kimutatható /ld. pl. [Greub 2] , p. 84.-85. , hogy

$$\forall\ t \in \otimes^p E\ ,\ \tau \in S_p :\ \underline{t - \varepsilon_\tau(\tau t) \in N^p(E)}$$

Amennyiben $t \in \otimes^p E$ és

$$\forall\ \tau \in S_p :\ \tau t = \varepsilon_\tau t\ ,$$

ugy azt mondjuk, hogy a t tenzor ferdeszimmetrikus. Világos, hogy az összes ferdeszimmetrikus p-edrendü tenzorok is alterét alkotják $\otimes^p E$-nek, ezt az alteret $X^p(E)$-vel fogjuk jelölni.

Bevezetve végül az alternátornak nevezett

$$\pi_{\mathfrak{A}} : \otimes^p E \longrightarrow \otimes^p E\ ,\ t \longmapsto \pi_{\mathfrak{A}}(t) \doteq \frac{1}{p!}\sum_{\tau \in S_p} \varepsilon_\tau(\tau t)$$

leképezést, megállapithatjuk a következőket:

1/ $\pi_{\mathfrak{A}}^2 = \pi_{\mathfrak{A}}$ /tehát $\pi_{\mathfrak{A}}$ projektor/, 2/ $\operatorname{Ker} \pi_{\mathfrak{A}} = N^p(E)$, $\operatorname{Im} \pi_{\mathfrak{A}} = X^p(E)$

és ezekből adódóan

$$\underline{\otimes^p E = X^p(E) \oplus N^p(E).}$$

Legyen mármost adott E vektortér esetén $\Lambda^p E$ <u>per definitionem</u> a

$$\otimes^p E \Big/ N^p(E)$$

faktortér,

$$\Lambda^p : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{p} \longrightarrow \Lambda^p E$$

pedig a

$$\Lambda^p(x_1, \ldots, x_p) \doteq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \quad (x_1, \ldots, x_p \in E)$$

előírással értelmezett leképezés, ahol $\pi : \otimes^p E \longrightarrow \Lambda^p E$ a kanonikus projekció. Belátható /ld. [Greub 2] p. 101./, hogy ekkor Λ^p ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezés, s hogy az így konstruált $(\Lambda^p E, \Lambda^p)$ pár eleget tesz a Λ_1, Λ_2 feltételeknek - ami a külső hatvány egzisztenciáját igazolja.

E gondolatsor lezárásaként arra mutatunk még rá, hogy a $\Lambda^p E$ vektortér izomorf az $X^p(E) \subset \otimes^p E$ altérrel. Tekintsük ebből a célból a

$$\varphi : E \times \cdots \times E \longrightarrow \otimes^p E, \; (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_p) \doteq \pi_{\mathfrak{A}}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezést. A Λ^p -re teljesülő univerzális tulajdonság alapján φ indukálja az

$$\begin{tikzcd}
E \times \cdots \times E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Lambda^p"'] & & \otimes^p E \\
& \Lambda^p E \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

diagramot kommutativvá tevő

$$\eta : \Lambda^p E \longrightarrow \otimes^p E$$

lineáris leképezést. Ekkor azonban a

$$\begin{tikzcd}
& \otimes^p E \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathfrak{A}}"] & \\
\Lambda^p E \arrow[rr, dashed, "\eta"] & & \otimes^p E
\end{tikzcd}$$

diagram ugyancsak kommutativ, hiszen

$$\eta[\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)] = \eta \Lambda^p(x_1, \ldots, x_p) = \varphi(x_1, \ldots, x_p) =$$
$$= \pi_{\mathfrak{A}}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p).$$

Az $\eta \circ \pi = \pi_{\mathfrak{A}}$ reláció - π nyilvánvaló szurjektivitása alapján - azt implikálja, hogy

$$\operatorname{Im} \eta = \operatorname{Im} \pi_{\mathfrak{A}} = X^p(E).$$

Egyszerűen ellenőrizhető továbbá a

$$\pi \circ \eta = \iota_{\Lambda^p E}$$

összefüggés teljesülése, amiből η injektiv volta adódik, következésképpen

$$\underline{\Lambda^p E \overset{\eta}{\cong} X^p E .}$$

Fölhasználva ezt az izomorfiát, tetszőleges $\Lambda^p(x_1, \ldots, x_p) \in \Lambda^p E$ elemet azonosithatunk - és azonositani is fogunk - az $\eta[\Lambda^p(x_1, \ldots, x_p)] = \pi_{\mathfrak{A}}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \in X^p(E)$

elemmel s erre a következőkben az $\underline{x_1 \wedge \cdots \wedge x_p}$ jelölést használjuk.

c) A rövidség kedvéért a $\Lambda^p E$ külső hatvány $X^p(E)$ "modelljének" segitségével vázoljuk végül az E vektortér külső algebrájának konstrukcióját. – Előkészitésként megjegyezzük, hogy tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ esetén

$$\beta : \otimes^p E \times \otimes^q E \longrightarrow \otimes^{p+q} E,$$

$$\beta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \doteq x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}$$

olyan bilineáris leképezés, amely a $(\otimes^{p+q} E, \beta)$ párt $\otimes^p E$ és $\otimes^q E$ tenzori szorzatává teszi. Ilymódon $\forall\, s \in \otimes^p E,\ t \in \otimes^q E$ esetén $\beta(s,t) = s \otimes t$ irható; ezt a $(p+q)$ -adrendü tenzort s és t tenzori szorzatának hivjuk.

Képezve mármost az

$$X(E) \doteq \sum_{p \in \mathbb{N}} X^p(E)$$

direkt összeget – $X^0(E) \doteq \Gamma$, $X^1(E) \doteq E$ megállapodás mellett –, tetszőleges $s, t \in X(E)$ esetén legyen

$$s \wedge t \doteq \pi_{\alpha}(s \otimes t).$$

Ekkor a

$$\wedge : X(E) \times X(E) \longrightarrow X(E)$$

müvelet $X(E)$ -t egységelemes, asszociativ algebrává teszi /az egységelem az $1 \in \Gamma$ /. Ezt az algebrát az E vektortér fölötti külső algebrának nevezzük s rá a $\underline{\Lambda E}$ jelölést használjuk.

2. Nyalábok

2.1. Terminológia, megállapodások

Sokaságon mindig véges dimenziós, Hausdorff-féle, megszámlálható bázisu, C^∞ -osztályu differenciálható sokaságot értünk. Differenciálható leképezésről /olykor egyszerüen csak leképezésről/ szólva C^∞ -leképezésre gondolunk; ha ennél enyhébb feltétellel akarunk élni, akkor azt külön jelezzük /ilyen enyhitésre azonban a II./8. alfejezetig nem fog sor kerülni/. Amennyiben M és N sokaságok, $C^\infty(M,N)$ -nel ill. speciálisan az $N=\mathbb{R}$ esetben $C^\infty(M)$ -mel jelöljük az $M\to N$ differenciálható leképezések ill. az $M\to\mathbb{R}$ differenciálható függvények halmazát /mely utóbbi természetes módon $\mathbb{R}$ fölötti asszociativ és kommutativ algebra/. Ha $\varphi\in C^\infty(M,N)$ és $\exists\ \varphi^{-1}\in C^\infty(N,M)$, akkor φ -t diffeomorfizmusnak nevezzük, $\varphi: M\to N$ diffeomorfizmus létezése esetén pedig az M és N sokaságokat diffeomorfaknak mondjuk. - Megadva az n -dimenziós /lokálisan $\mathbb{R}^n$ -nel homeomorf/ M sokaság egy $(\mathcal{U},\psi)$ térképét, az ehhez tartozó /lokális/ koordinátarendszeren olyan

$$x^i \doteq \ell^i\circ\psi \ :\ \mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R} \qquad (i=1,\dots,n)$$

függvényrendszert értünk, ahol $\ell^1,\dots,\ell^n$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tetszőlegesen rögzitett bázisához duális bázisa az $L(\mathbb{R}^n)$ konjugált térnek.

2.2. Fibrált nyaláb

4. definició Legyenek adva az E, B, F sokaságok továbbá a $\pi: E \longrightarrow B$ differenciálható leképezés.

a/ A $\mathcal{B} = (E, \pi, B, F)$ négyest differenciálható fibrált nyalábnak /vagy egyszerűen fibrált nyalábnak ill. csak nyalábnak/ nevezzük, ha létezik olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ együttes, amelyre teljesülnek a következők:

/1/ $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nyilt lefedése B -nek;

/2/ $\forall \alpha \in A: \quad \psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ diffeomorfizmus;

/3/ $\forall x \in \mathcal{U}_\alpha,\ y \in F: \quad \pi \circ \psi_\alpha(x, y) = x,$ vagyis az

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_\alpha \times F \arrow[rr, "\psi_\alpha"] \arrow[dr, "pr_\alpha"'] & & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{U}_\alpha & \end{tikzcd}$$

diagram - ahol pr_α az $\mathcal{U}_\alpha$ tényezőre való természetes projekciót jelöli - kommutativ.

b/ A $\mathcal{B}$ nyaláb egy metszetén olyan

$$\sigma : B \longrightarrow E$$

differenciálható leképezést értünk, amelyre

$$\pi \circ \sigma = \iota_B$$

teljesül; $\mathcal{B}$ metszeteinek halmazát $\mathrm{Sec}\,\mathcal{B}$ -vel jelöljük.

c/ Legyen $\mathcal{B}' = (E', \pi', B', F')$ egy további fibrált nyaláb! - A $\varphi: E \rightarrow E'$ differenciálható leképezést fibrumtartó leképezésnek nevezzük, ha

$$\forall z_1, z_2 \in E: \quad \pi(z_1) = \pi(z_2) \Longrightarrow \pi'[\varphi(z_1)] = \pi'[\varphi(z_2)].$$

<u>Megjegyzések</u>

1/ Egy $\mathcal{B} = (E, \pi, B, F)$ nyalábbal kapcsolatban a következő elnevezéseket használjuk:

E - <u>totáltér</u>;

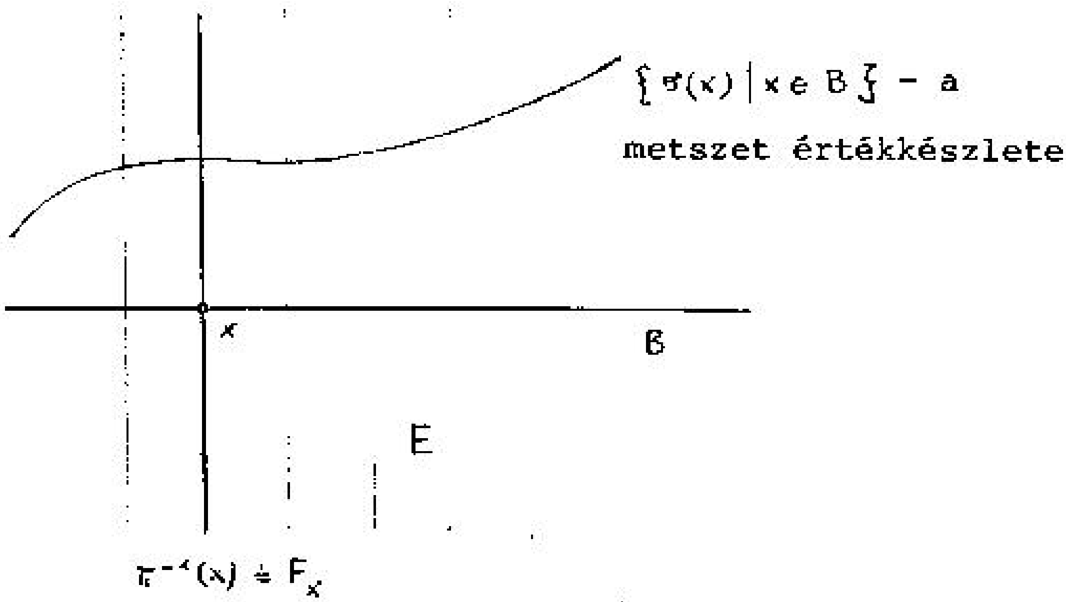
B - <u>bázistér</u> vagy <u>bázissokaság</u>;

F - <u>fibrumtipus</u>;

$F_x \doteq \pi^{-1}(x)$ - az $x \in B$ pont fölötti <u>fibrum</u>;

$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ - a nyaláb egy <u>koordinátaelőállitása</u>.

<u>Szemléltetés</u>



2/ Könnyen látható, hogy minden $\varphi: E \longrightarrow E'$ fibrumtartó leképezés indukál a bázisterek között egy olyan $\varphi_B : B \longrightarrow B'$ leképezést, amelyet <u>jellemez</u> az

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, dashed, "\varphi_B"'] & B' \end{tikzcd}$$

diagram kommutativitása. A φ_B indukált leképezésről egyszerűen kimutatható, hogy differenciálható.

—— . ——

A továbbiak szempontjából igen hasznos kiinduló eredményt rögzit az

1. konstrukciól lemma /fibrált nyaláb konstrukció/

Legyen B és F egy-egy sokaság, E egy /nemüres/ halmaz, $\pi : E \longrightarrow B$ pedig szürjektiv leképezés. - Ha megadható olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ együttes, hogy

/1/ $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nyilt lefedése B -nek;

/2/ $\forall \alpha \in A : \psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ bijekció;

/3/ $\forall x \in \mathcal{U}_\alpha, y \in F : \pi \circ \psi_\alpha(x, y) = x$;

/4/ $\forall \alpha, \beta \in A : \psi_{\beta\alpha} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times F \longrightarrow \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times F,$

$$(x, y) \longmapsto \psi_{\beta\alpha}(x, y) \doteq \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha(x, y)$$

diffeomorfizmus / $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \emptyset$ esetén per definitionem/, akkor az E halmazon egyértelműen létezik olyan differenciálható struktura, amely az (E, π, B, F) négyest $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koordinátaelőállitással rendelkező fibrált nyalábbá teszi.

- A bizonyitást - amely azonban pl. a [St] /2.1. tételre való hivatkozással meglehetősen egyszerü - mellőzzük. ⊘

2.3. Vektornyaláb

5. definició

a/ A $\xi = (E, \pi, B, F)$ négyes /valós/ vektornyaláb, ha teljesülnek rá a következők:

VB1. ξ fibrált nyaláb.

VB2. F és az $F_x = \pi^{-1}(x)$ $(x \in B)$ fibrumok /véges-dimenziós, valós/ vektorterek.

VB3. ξ rendelkezik olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ún. vektornyaláb-koordinátaelőállitással, amelyre nézve a

$$\psi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F_x \,, \quad y \longmapsto \psi_{\alpha,x}(y) \doteq \psi_\alpha(x,y)$$

leképezések lineáris izomorfizmusok.

b/ Ha $\mathfrak{U} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ vektornyaláb-koordinátaelőállitása ξ -nek, akkor azt mondjuk, hogy az

$$g_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(F)\,, \quad x \longmapsto g_{\alpha\beta}(x) \doteq \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x}$$

leképezések az $\mathfrak{U}$ -hoz tartozó koordinátatranszformációk vagy hogy a $g_{\alpha\beta}$ leképezések egy $\mathfrak{U}$-kociklust alkotnak.

c/ Az $\mathcal{U} \subset B$ nyilt halmaz egy trivializáló környezet a vektornyaláb számára, ha létezik olyan, az

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times F \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "pr_1"'] & & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

diagramot kommutativvá tevő

$$\psi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

diffeomorfizmus, amelyre

$$\forall x \in \mathcal{U}: \quad \psi_{\mathcal{U},x}: F \longrightarrow F_x\,;\ y \longmapsto \psi_{\mathcal{U},x}(y) \doteq \psi_{\mathcal{U}}(x,y)$$

lineáris izomorfizmus. $\psi_{\mathcal{U}}$ -t ekkor ξ egy $\mathcal{U}$ fölötti <u>trivializáló leképezésé</u>nek hivjuk.

d/ A ξ -vel közös bázisterü $\xi' = (E', \pi', B, F')$ vektornyaláb <u>résznyalábja</u> ξ -nak, ha valamennyi F'_x fibruma lineáris altere a megfelelő F_x fibrumnak s az $F'_x \longrightarrow F_x$ $(x \in B)$ inkluziók által indukált $i: E' \longrightarrow E$ inkluzió differenciálható leképezés.

e/ Ha $\xi = (E, \pi, B, F)$ valamint $\xi' = (E', \pi', B', F')$ vektornyalábok és $\varphi: E \longrightarrow E'$ olyan differenciálható fibrumtartó leképezés, amelynek a fibrumokra való $\varphi_x: F_x \longrightarrow F_{\varphi_B(x)}$ / $x \in B$; $\varphi_B: B \longrightarrow B'$ az indukált leképezés/ leszükitései <u>lineárisak</u>, akkor azt mondjuk, hogy egy <u>$\varphi: \xi \longrightarrow \xi'$ nyalábleképezés</u> van adva. Amennyiben ξ és ξ' bázistere közös és $\varphi: \xi \longrightarrow \xi'$ olyan nyalábleképezés, amely a közös bázistér identikus transzformációját indukálja, ugy φ -t <u>erős nyalábleképezésnek</u> hivjuk. <u>Vektornyalábizomorfizmuson</u> olyan nyalábleképezést értünk, amely diffeomorfizmus a totálterek között, s $\xi \xrightarrow{\cong} \eta$ vektornyaláb - izomorfizmus létezése esetén a ξ és η vektornyalábot egymással <u>izomorfnak</u> mondjuk.

f/ Tekintsük a /közös bázisterü/ $\xi = (E, \pi, B, F)$, $\xi' = (E', \pi', B, F')$, $\xi'' = (E'', \pi'', B, F'')$ vektornyalábokat s jelölje 0 a B bázisterü zérus-vektornyalábot, vagyis azt a B fölötti vektornyalábot, amelynek fibrumtipusa nulldimenziós. Legyen $\varphi: \xi' \to \xi$ és $\psi: \xi \to \xi''$ egy-egy nyalábleképezés. - A

$$0 \longrightarrow \xi' \xrightarrow{\varphi} \xi \xrightarrow{\psi} \xi'' \longrightarrow 0$$

sorozatot <u>rövid egzakt vektornyaláb-sorozat</u>nak nevezzük, ha

$$\forall\ x \in B: \quad 0 \longrightarrow F'_x \xrightarrow{\varphi_x} F_x \xrightarrow{\psi_x} F''_x \longrightarrow 0$$

a szereplő <u>vektorterek</u> és lineáris leképezések egy rövid egzakt sorozata. A

$$0 \longrightarrow \xi' \xrightarrow{\varphi} \xi \xrightarrow{\psi} \xi'' \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sorozatról azt mondjuk, hogy <u>levágott</u> /<u>split</u>/, ha van olyan $\chi: \xi'' \to \xi$ <u>erős</u> nyalábleképezés, amelyre $\psi \cdot \chi = \iota_{\xi''}$ teljesül. Ekkor a χ nyalábleképezést a sorozat <u>levágó leképezés</u>eként is említjük.

<u>Megjegyzések</u>

1/ A fibrált nyalábokkal kapcsolatban korábban bevezetett elnevezéseket értelemszerüen átvittük és átvisszük vektornyalábokra is.

2/ Az <u>$\mathcal{U}$-kociklus</u>ra itt adott definició egybevág a fogalom általánosabb, sheaf-elméletbeli értelmezésével /v.ö. pl. [H], p. 38./. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in A$ esetén $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}$ fölött teljesül a

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$

un. <u>kociklus-feltétel</u> /$\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} = \emptyset$ esetén per definitionem/.

3/ Fölvetődik a kérdés: a vektorterek és lineáris leképezéseik rövid egzakt sorozatára az 1. állításban megfogalmazott tulajdonság átvihető-e vektornyalábokra? - A válasz igenlő, de nem adódik automatikusan: további ismeretek - így pl. a későbbi 10. állítás felhasználása szükséges annak kimutatásához, hogy minden rövid egzakt vektornyaláb-sorozatnak <u>létezik levágása</u>.

4/ Ha ξ vektornyaláb, akkor $\mathrm{Sec}\,\xi \neq \emptyset$; nevezetesen - 0_x -szel jelölve az F_x fibrum zérusvektorát - az

$$\sigma : B \longrightarrow E \,, \quad x \longmapsto \sigma(x) \doteq 0_x \in F_x$$

leképezés metszet; ez az un. <u>nullmetszet</u>.

<u>7. állítás</u>. A ξ és η vektornyaláb közötti $\varphi : \xi \longrightarrow \eta$ nyalábleképezés pontosan akkor <u>vektornyaláb-izomorfizmus</u>, ha a fibrumokra való

$$\varphi_x : F_x \longrightarrow F'_{\varphi_B(x)} \qquad (x \in B)$$

leszűkítései <u>lineáris izomorfizmusok</u>, a φ_B indukált leképezés pedig diffeomorfizmus a bázisterek között.

<u>Bizonyítás</u>. Ld. [GHV], Vol.I., p.45. ⊘

<u>8. állítás</u> B bázisterű ξ vektornyaláb metszetei $C^\infty(B)$-modulust alkotnak a következő operációkkal:

$$(\sigma_1, \sigma_2) \longmapsto \sigma_1 + \sigma_2 \,, \quad (\sigma_1 + \sigma_2)(x) \doteq \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \,;$$

$$(f, \sigma) \longmapsto f\sigma \,, \quad (f\sigma)(x) \doteq f(x)\sigma(x)$$

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \,,\; f \in C^\infty(B) \,,\; x \in B) \,.$$ ⊘

—— . ——

További tárgyalásunk során lényeges szerepet játszik az 1. konstrukciós lemmán alapuló

2. konstrukciós lemma /vektornyaláb-konstrukció/

Legyen adva egy B sokaság és egy F r -dimenziós vektortér. Rendeljünk hozzá minden egyes $x \in B$ ponthoz egy F_x r -dimenziós vektorteret, legyen

$$E \doteq \bigcup_{x \in B} F_x$$

s tekintsük a

$$\pi : E \longrightarrow B ; \; y \in F_x \longmapsto \pi(y) \doteq x$$

leképezést. - Ha létezik olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha ; \psi_{\alpha,x})\}_{\alpha \in A, x \in \mathcal{U}_\alpha}$ együttes, ahol

1^o $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ nyilt lefedése B -nek;

2^o $\forall \alpha \in A, x \in \mathcal{U}_\alpha :$ $\psi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F_x$ diffeomorfizmus

és amelyre teljesül

3^o a $g_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(F), \; x \longmapsto g_{\alpha\beta}(x) \doteq \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x}$

leképezések differenciálhatók /"D-feltétel"/,

akkor az E halmaz egyértelmüen fölruházható olyan differenciálható strukturával, amely az (E, π, B, F) négyest vektornyalábbá teszi. E vektornyalábnak

$$\left\{ (\mathcal{U}_\alpha , \psi_\alpha) \,\middle|\, \alpha \in A; \; \begin{array}{l} \psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), \\ \quad (x, y) \longmapsto \psi_\alpha(x,y) \doteq \psi_{\alpha,x}(y) \end{array} \right\}$$

egy vektornyaláb-koordinátaelőállitása, az $x \in B$ pontokhoz tartozó fibrumok pedig éppen az ezekhez hozzárendelt F_x vektorterek.

<u>Bizonyitás</u>. Nyilván elegendő annyit megmutatnunk, hogy az $\{(\mathcal{U}_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ együttes eleget tesz az 1. konstrukciós lemma /2/-/4/ feltételeinek.

<u>ad /2/</u> $\forall y' \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$: $\exists x \in \mathcal{U}_\alpha$: $y' \in F_x$. Mivel 2^o miatt speciálisan $\Psi_{\alpha,x}: F \to F_x$ bijekció, $\exists y \in F$: $y' = \Psi_{\alpha,x}(y) \doteq \Psi_\alpha(x,y)$; következőleg a Ψ_α leképezések <u>szürjektivek</u>. Ugyanakkor valamennyi Ψ_α leképezés <u>injektiv</u> is:

$$\Psi_\alpha(x_1, y_1) = \Psi_\alpha(x_2, y_2) \Longrightarrow \Psi_{\alpha,x_1}(y_1) = \Psi_{\alpha,x_2}(y_2) \in F_{x_1} \cap F_{x_2}$$

$$\Longrightarrow \underline{x_1 = x_2} \doteq x_0 ;\ \Psi_{\alpha,x_0}(y_1) = \Psi_{\alpha,x_0}(y_2) \Longrightarrow \underline{y_1 = y_2}.$$

<u>ad /3/</u> $\forall\ x \in \mathcal{U}_\alpha ,\ y \in F$: $\pi \circ \Psi_\alpha(x,y) = \pi \circ \Psi_{\alpha,x}(y) = x$, mert $\Psi_{\alpha,x}(y) \in F_x$.

<u>ad /4/</u> Az eddig elmondottak alapján tetszőleges $\alpha, \beta \in A$ indexpárt véve képezhetők a

$$\Psi_{\beta\alpha} \doteq \Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha : \quad \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times F \longrightarrow \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times F$$

leképezések és ezek bijektivek /megállapodva abban, hogy ha $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \emptyset$, akkor $\Psi_{\beta\alpha}$ per definitionem létezik és bijektiv/. Mivel tetszőleges $(x,y) \in \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times F$ esetén egyrészt

$$\Psi_\beta[\Psi_{\beta\alpha}(x,y)] = \Psi_\beta \circ \Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha(x,y) = \Psi_\alpha(x,y) \doteq \Psi_{\alpha,x}(y),$$

másrészt

$$\Psi_\beta[x, \Psi_{\beta,x}^{-1} \circ \Psi_{\alpha,x}(y)] \doteq \Psi_{\beta,x}[\Psi_{\beta,x}^{-1} \circ \Psi_{\alpha,x}(y)] = \Psi_{\alpha,x}(y),$$

fennáll a

$$\Psi_\beta[\Psi_{\beta\alpha}(x,y)] = \Psi_\beta[x, \Psi_{\beta,x}^{-1} \circ \Psi_{\alpha,x}(y)]$$

összefüggés. Ez azonban azt jelenti, hogy

$$\psi_{\beta\alpha}(x,y)=[x,\ \psi_{\beta,x}^{-1}\circ\psi_{\alpha,x}(y)]\ ,$$

hiszen a ψ_β leképezések injektivek. Eredményünk a jobboldal triviális átalakitásával a

$$\psi_{\beta\alpha}(x,y)=\left(pr_1(x,y),\ g_{\beta\alpha}\circ pr_2(x,y)\right)$$

alakban is irható, innen pedig a D -feltétel figyelembevételével közvetlenül kiolvasható: a $\psi_{\beta\alpha}$ leképezések differenciálhatók - s következésképpen diffeomorfizmusok.

2.4. Példák vektornyaláb-konstrukciókra

A] Lineáris és multilineáris eljárások

Egy vagy több /de az utóbbi esetben mindig közös bázisterünek föltételezett/ vektornyalábból kiindulva, a fibrumokra alkalmazott - nagy vonalakban az 1. alfejezetben áttekintett - "lineáris és multilineáris eljárások" révén a 2. konstrukciós lemma alapján ujabb vektornyalábok épithetők föl. - Nevezetesen: megadva a

$$\xi=(E^1,\pi^1,B;F^1) \quad \text{és} \quad \eta=(E^2,\pi^2,B;F^2)$$

vektornyalábokat - egyebek mellett - képezhetők a következők:

	Jelölés	Fibrumok $(x \in B)$
1. Whitney-összeg	$\xi \oplus \eta$	$F_x^1 \oplus F_x^2$
2. Tenzornyaláb	$\xi \otimes \eta$	$F_x^1 \otimes F_x^2$
3. Bivektor-nyaláb	$\Lambda^2 \xi \doteq \xi \wedge \xi$	$\Lambda^2 F_x^1$
4. Konjugált nyaláb	ξ^*	$L(F_x^1)$
5a/	$L(\xi;\eta)$	$L(F_x^1;F_x^2)$
5b/	$L_\xi \doteq L(\xi;\xi)$	$L(F_x^1, F_x^1)$

Az 1-3. esetekben a konstrukció kiterjesztése több tagra ill. tényezőre értelemszerű. - Megjegyzendő, hogy amennyiben egyidejüleg több, közös bázisterü vektornyalábot tekintünk, ugy az általánosság sérelme nélkül mindig választhatók számukra olyan vektornyaláb-koordinátaelőállitások, amelyek a közös bázistér ugyanazon nyilt lefedéséhez tartoznak. Ezzel a lehetőséggel végig élni fogunk.

A most tett kijelentések átfogó és teljes bizonyitását illetően elegendő az irodalomra utalnunk /ld. pl. [GHV], Vol.I., Ch.2./. Tüzetesebben szemügyre kell azonban vennünk a tenzornyalábot, ugyanis mind a vele kapcsolatos állitás részletes és pontos kimondása, mind annak igazolása fontos szerephez fog jutni vizsgálataink során.

9. állitás Legyenek $\xi^i = (E^i, \pi^i, B, F^i)$ $(i=1,2)$ /közös bázisterü/ vektornyalábok,

$\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha^i)\}$; $i=1,2$

vektornyaláb-koordinátaelőállitásokkal. - Az

$$E \doteq \bigcup_{x \in B} F_x^1 \otimes F_x^2$$

halmazon egyértelmüen létezik olyan differenciálható struktura, amely az

$$(E, \pi, B, F^1 \otimes F^2)$$

négyest - itt $\pi: E \longrightarrow B,\ Y \in F^1_x \otimes F^2_x \longmapsto \pi(Y) \doteq x$ - egy $\xi^1 \otimes \xi^2$ vektornyalábbá - azaz <u>tenzornyalábbá</u> - teszi. A tenzornyaláb számára vektornyaláb-koordinátaelőállítás az

$$\mathfrak{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}$$

együttes, ahol

$$\psi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times (F^1 \otimes F^2) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),$$

$$(x, y_1 \otimes y_2) \longmapsto \psi_\alpha(x, y_1 \otimes y_2) \doteq \psi_{\alpha,x}(y_1 \otimes y_2) \doteq \psi^1_{\alpha,x} \otimes \psi^2_{\alpha,x}(y_1 \otimes y_2)$$

és az $\mathfrak{A}$ -kociklust alkotó leképezések értékeiket a $GL(F^1 \otimes F^2)$ csoport $GL(F^1) \otimes GL(F^2)$ részcsoportjában veszik föl.

<u>Bizonyitás</u>. Rendre verifikáljuk, hogy az állitásban megadott $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_{\alpha,x})\}$ együttes eleget tesz a 2. konstrukciós lemma 1^o-3^o feltételeinek. - 1^o teljesülése $\mathfrak{A}$ definiciójára tekintettel automatikus, hiszen $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ szerepel mind ξ^1, mind ξ^2 megadott vektornyaláb-koordinátaelőállitásában. - Mivel a VB3. axióma értelmében a

$$\psi^i_{\alpha,x} : F^i \longrightarrow F^i_x \quad (i = 1,2)$$

leképezések lineáris izomorfizmusok, s igy a természetes differenciálható strukturákra nézve egyuttal diffeomorfizmusok is, következik, hogy a

$$\psi_{\alpha,x} \doteq \psi^1_{\alpha,x} \otimes \psi^2_{\alpha,x} : F^1 \otimes F^2 \longrightarrow F^1_x \otimes F^2_x$$

leképezések diffeomorfizmusok, azaz hogy 2^o ugyancsak fennáll. - Tekintettel végül arra, hogy az állitásbeli $\mathfrak{A}$ -kociklust alkotó $g_{\alpha\beta}$ leképezések a

$$\underline{g_{\alpha\beta}(x)} \doteq \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} = (\psi_{\alpha,x}^1 \otimes \psi_{\alpha,x}^2) \circ (\psi_{\beta,x}^1 \otimes \psi_{\beta,x}^2) =$$
$$= (\psi_{\alpha,x}^1)^{-1} \otimes (\psi_{\alpha,x}^2)^{-1} \circ \psi_{\beta,x}^1 \otimes \psi_{\beta,x}^2 =$$
$$= [(\psi_{\alpha,x}^1)^{-1} \circ \psi_{\beta,x}^1] \otimes [(\psi_{\alpha,x}^2)^{-1} \circ \psi_{\beta,x}^2] =$$
$$= \underline{g_{\alpha\beta}^1(x) \otimes g_{\alpha\beta}^2(x)} \qquad (x \in \mathcal{U}_{\alpha\beta})$$

összefüggés szerint hatnak, a 2. konstrukciós lemma D - feltételének teljesülése és a szóbanforgó $\mathfrak{U}$ -kociklus leképezéseire tett kijelentés helyessége egyaránt világos. - Ezzel állitásunkat teljes egészében igazoltuk.▨

<u>Megjegyzés</u> Korábbi terminológiai megállapodásainkat a tenzor-<u>nyalábbal</u> kapcsolatban is fenntartjuk!

—— . ——

A táblázatban foglaltakhoz kapcsolódóan még egy fontos észrevételt teszünk. - Vektortereknek jellegzetes tulajdonsága, hogy bennük minden altér föllép direkt összeadandóként, vagyis hogy egy E vektortér tetszőleges H alteréhez megadható olyan $K \subset E$ altér, amellyel $E = H \oplus K$. Ez a tulajdonság - bár távolról sem triviális módon! - mintegy átöröklődik a vektornyalábokra is, érvényes ui. a

<u>10. állitás</u> Vektornyaláb minden résznyalábja föllép Whithey-összeadandóként.

<u>Bizonyitás</u>. Ld. [GHV] , Vol. I. p. 69-70.▨

B| Indukált nyaláb

A 2. konstrukciós lemma némileg másjellegű alkalmazásával nyerhető a

11. állítás Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, egy M sokaság és egy
$\sigma : M \longrightarrow B$
differenciálható leképezés. Tegyük föl, hogy

$$\mathfrak{A} = \{ (V_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$$

egy vektornyaláb-koordinátaelőállítás ξ számára. Legyen

$$N \doteq \bigcup_{x \in M} F_{\sigma(x)} ;$$

$$\varrho : N \longrightarrow M, \; y \in F_{\sigma(x)} \longmapsto \varrho(y) \doteq x ;$$

$$\mathcal{U}_\alpha \doteq \sigma^{-1}(V_\alpha), \quad \psi_{\alpha, x} \doteq \varphi_{\alpha, \sigma(x)} .$$

Ekkor

1/ $\{ \mathcal{U}_\alpha \}_{\alpha \in A}$ nyilt lefedése M -nek;

2/ $\forall \alpha \in A, \; x \in \mathcal{U}_\alpha : \psi_{\alpha, x} : F \longrightarrow F_{\sigma(x)}$ diffeomorfizmus;

3/ a $\gamma_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(F), \; x \longmapsto \gamma_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha, x}^{-1} \circ \psi_{\beta, x}$
leképezések differenciálhatók,

következésképpen N egyértelmüen fölruházható olyan differenciálható strukturával, amely az (N, ϱ, M, F) négyest vektornyalábbá teszi. E vektornyaláb számára egy vektornyaláb-koordinátaelőállítás az a $\mathfrak{F} = \{ (\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ együttes, ahol a ψ_α leképezések a $\psi_{\alpha, x}$ leképezésekből a 2. konstrukciós lemmában leirtak szerint származnak, a $\gamma_{\alpha\beta}$ leképezések pedig $\mathfrak{F}$ -kociklust alkotnak.

- Az (N, ϱ, M, F) vektornyalábra a $\sigma^* \xi$ jelölést használjuk és azt mondjuk, hogy $\sigma^* \xi$ a σ leképezés által indukált nyaláb.

Bizonyitás.

1/ teljesülése világos: $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nyilván lefedése M -nek, mégpedig nyilt lefedése, hiszen a differenciálhatóság miatt a σ leképezés folytonos is.

2/ következik a VB3. axiómából, tekintettel arra, hogy $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ vektornyaláb-koordinátaelőállitás ξ számára.

3/ verifikálása végett vegyük észre, hogy amennyiben az $\mathfrak{A}$ -kociklust a $g_{\alpha\beta}$ leképezések alkotják, ugy tetszőleges $x\in\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ esetén

$$\gamma_{\alpha\beta}(x) \doteq \psi_{\alpha,x}^{-1}\circ\psi_{\beta,x} = \varphi_{\alpha,\sigma(x)}^{-1}\circ\varphi_{\beta,\sigma(x)} = g_{\alpha\beta}[\sigma(x)] = g_{\alpha\beta}\circ\sigma(x);$$

tehát

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\circ\sigma,$$

ami a $\gamma_{\alpha\beta}$ leképezések differenciálhatóságát jelenti.

Mivel 1/-3/ fennállása éppen a 2. konstrukciós lemma 1°-3° feltételeinek érvényességét mutatja ebben a speciális szituációban, az állitásban tett további kijelentések közvetlenül adódnak. ⊘

2.5. Lokális koordinátarendszer vektornyalábon

Legyen az $\mathcal{U}\subset B$ nyilt halmaz trivializáló környezet a $\xi=(E,\pi,B,F)$ vektornyaláb számára, $\psi_{\mathcal{U}}: \mathcal{U}\times F\to\pi^{-1}(\mathcal{U})$ trivializáló leképezéssel./ Trivializáló környezet minden vektornyaláb esetén létezik, hiszen VB3. értelmében tetszőleges vektornyaláb-koordinátaelőállítás bármely környezete ilyen./ Tegyük fel, hogy $x^1, \dots, x^n$ a bázissokaság egy $\mathcal{U}$ fölötti lokális koordinátarendszere, $\ell^1, \dots, \ell^r$ pedig az F fibrumtipus egy tetszőlegesen rögzitett bázisához duális bázisa az $L(F)$ konjugált térnek. - Közvetlenül látható, hogy az

$$\begin{cases} y^i \doteq x^i \circ \pi & (i = 1, \dots, n), \\ y^{n+\alpha} \doteq \ell^\alpha \circ pr_2 \circ \psi_{\mathcal{U}}^{-1} & (\alpha = 1, \dots, r) \end{cases}$$

függvényrendszer lokális koordinátarendszer az E totáltér $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ nyilt halmazán; e lokális koordinátarendszerről a következőkben azt mondjuk, hogy /egy/ standard vagy szokásos koordinátarendszer az $\mathcal{U}$ trivializáló környezet $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ projekció-inverzén.

Tegyük föl, hogy speciálisan egy rs -rangu

$$\xi = \xi^1 \otimes \xi^2 = (E, \pi, B, F^1 \otimes F^2) \quad (r = \dim F^1, s = \dim F^2)$$

tenzornyaláb van adva. Ekkor nyilván választható olyan $\mathcal{U} \subset B$ nyilt halmaz, amely egyaránt trivializáló környezet a ξ^1, ξ^2 és ξ vektornyaláb számára, rendre $\psi_{\mathcal{U}}^1, \psi_{\mathcal{U}}^2$ és $\psi_{\mathcal{U}}$ trivializáló leképezésekkel s a 9. állításban mondottakra hivatkozva az is föltehető, hogy az utóbbi leképezésekből a 4c/ definicióban leirt módon képzett $\psi_{\mathcal{U},x}^1, \psi_{\mathcal{U},x}^2, \psi_{\mathcal{U},x}$ leképezések a

$$\psi_{\mathcal{U},x} = \psi_{\mathcal{U},x}^1 \otimes \psi_{\mathcal{U},x}^2 \qquad /x \in \mathcal{U} \text{ tetszőleges}/$$

összefüggés szerinti kapcsolatban állnak egymással. - Tenzornyaláb $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölötti standard koordinátarendszeréről mindig a most részletezett megszorítások föltételezésével fogunk beszélni s ezen az általános eset analógiájára képzett

$$\begin{cases} y^i \doteq x^i \circ \pi & (i = 1, \dots, n)\,, \\ t^{\alpha\lambda} \doteq \ell^\alpha \otimes \mathcal{L}^\lambda \circ pr_2 \circ \psi_{\mathcal{U}}^{-1} & (\alpha = 1, \dots, r;\ \lambda = 1, \dots, s) \end{cases}$$

függvényrendszert értjük, ahol $\{\ell^\alpha\}$ és $\{\mathcal{L}^\lambda\}$ az $L(F^1)$ és $L(F^2)$ vektortér egy-egy tetszőlegesen rögzített bázisa.
- Egyszerü, de hasznos észrevételt rögzit a

__12. állítás__ Ha $\{y^i; t^{\alpha\lambda}\}$ a $\xi = \xi^1 \otimes \xi^2 = (E, \pi, B, F^1 \otimes F^2)$ tenzornyalábnak standard koordinátarendszere az $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekció-inverzén, akkor a

$$t^{\alpha\lambda} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényeknek az $F_x = F_x^1 \otimes F_x^2$ $(x \in \mathcal{U})$ fibrumokra való leszükitései az

$$L(F_x^1 \otimes F_x^2) \equiv L(F_x^1) \otimes L(F_x^2)$$

vektortér <u>dekomponálható</u> elemei.

<u>Bizonyitás</u>. Az előrebocsátottak szerint a

$$\psi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times (F^1 \otimes F^2) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

trivializáló leképezés segitségével képzett

$$\psi_{\mathcal{U},x} : F^1 \otimes F^2 \longrightarrow F_x^1 \otimes F_x^2\,,\ y_1 \otimes y_2 \longmapsto \psi_{\mathcal{U},x}(y_1 \otimes y_2) \doteq \psi_{\mathcal{U}}(x, y_1 \otimes y_2)$$

leképezésekre

$$\psi_{\mathcal{U},x} = \psi^1_{\mathcal{U},x} \otimes \psi^2_{\mathcal{U},x}$$

teljesül, ahol $\psi^1_{\mathcal{U}}$ és $\psi^2_{\mathcal{U}}$ ξ^1 ill. ξ^2 számára trivializáló leképezés $\mathcal{U}$ fölött. Mivel a

$$\Psi^{i}_{\mathcal{U},x} : F^{i} \longrightarrow F^{i}_{x} \qquad (i=1,2)$$

leképezések lineáris izomorfizmusok, tenzori szorzatuk a

$$\Psi^{1}_{\mathcal{U},x} \otimes \Psi^{2}_{\mathcal{U},x} : F^{1} \otimes F^{2} \longrightarrow F^{1}_{x} \otimes F^{2}_{x}$$

lineáris izomorfizmusokat adja. Tetszőlegesen rögzitett $x \in \mathcal{U}$ mellett a $\Psi^{1}_{\mathcal{U},x} \otimes \Psi^{2}_{\mathcal{U},x}$ lineáris leképezés duálisa a

$$(\Psi^{1}_{\mathcal{U},x} \otimes \Psi^{2}_{\mathcal{U},x})^{*} : L(F^{1}_{x} \otimes F^{2}_{x}) \xrightarrow{\cong} L(F^{1} \otimes F^{2})$$

lineáris izomorfizmushoz vezet, ez utóbbi helyett azonban a 3. és 4. állitás figyelembevételével

$$(\Psi^{1}_{\mathcal{U},x})^{*} \otimes (\Psi^{2}_{\mathcal{U},x})^{*} : L(F^{1}_{x}) \otimes L(F^{2}_{x}) \longrightarrow L(F^{1}) \otimes L(F^{2})$$

is irható. - Tekintsük mármost az $\{\ell^{\alpha}\}$ és $\{\mathcal{L}^{\lambda}\}$ bázisok F^{1} - ill. F^{2}-beli $\{a_{\alpha}\}$ ill. $\{b_{\lambda}\}$ duálisát, Akkor

$$\Psi_{\mathcal{U},x}(a_{\alpha} \otimes b_{\lambda}) = \Psi^{1}_{\mathcal{U},x} \otimes \Psi^{2}_{\mathcal{U},x}(a_{\alpha} \otimes b_{\lambda}) =$$

$$= \Psi^{1}_{\mathcal{U},x}(a_{\alpha}) \otimes \Psi^{2}_{\mathcal{U},x}(b_{\lambda})$$

folytán $\{\Psi_{\mathcal{U},x}(a_{\alpha} \otimes b_{\lambda})\}$ $F^{1}_{x} \otimes F^{2}_{x}$ -nek <u>dekomponálható tenzorok</u> alkotta bázisa, és ha

$$t^{\beta\nu}\Big|_{F^{1}_{x} \otimes F^{2}_{x}} \doteq t^{\beta\nu}_{x} \,,$$

akkor

$$t^{\beta\nu}_{x}\left[\Psi_{\mathcal{U},x}(a_{\alpha} \otimes b_{\lambda})\right] = \ell^{\beta} \otimes \mathcal{L}^{\nu} \circ pr_{2} \circ \Psi^{-1}_{\mathcal{U}}\Big|_{F^{1}_{x} \otimes F^{2}_{x}}\left[\Psi_{\mathcal{U}}(x, a_{\alpha} \otimes b_{\lambda})\right] =$$

$$= \ell^{\beta} \otimes \mathcal{L}^{\nu} \circ pr_{2}(x, a_{\alpha} \otimes b_{\lambda}) = \ell^{\beta} \otimes \mathcal{L}^{\nu}(a_{\alpha} \otimes b_{\lambda}) =$$

$$= \ell^{\beta}(a_{\alpha})\mathcal{L}^{\nu}(b_{\lambda}) = \delta^{\beta}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\lambda} \,,$$

ami azt jelenti, hogy a

$$t_x^{\beta\lambda} \in L(F_x^1 \otimes F_x^2) = L(F_x^1) \otimes L(F_x^2)$$

függvények a $\{\Psi_{u,x}(a_\alpha \otimes b_\lambda)\}$ bázishoz duális bázisát alkotják $L(F_x^1) \otimes L(F_x^2)$ -nek. Mivel másfelől a $(\Psi_{u,x}^1)^* \otimes (\Psi_{u,x}^2)^*$ lineáris izomorfizmus inverze az $\{a_\alpha \otimes b_\lambda\}$ bázis $\{\ell^\alpha \otimes \mathcal{L}^\lambda\}$ duálisát szintén a $\{\Psi_{u,x}(a_\alpha \otimes b_\lambda)\}$ bázishoz duális bázisba viszi, amelyet a

$$(\Psi_{u,x}^1)^{*-1}(\ell^\alpha) \otimes (\Psi_{u,x}^2)^{*-1}(\mathcal{L}^\lambda)$$

dekomponálható tenzorok alkotnak, a duális bázis egyértelműségéből következik a $t_x^{\beta\lambda}$ bázisvektorok dekomponálhatósága. ▨

3. Differenciálformák

Alfejezetünk első két pontjában közismertnek mondható s a továbbiakban lépten-nyomon előforduló fogalmakról, tényekről adunk - jobbára felsorolásszerü - áttekintést. Célunk elsősorban a szó- és jelöléshasználat rögzitése, egy--két helyen azonban kicsit alaposabban is el kell majd időznünk. A 3. pont a sokaság differenciálformáinak egy bizonyos - tárgyalásunk szempontjából igen lényeges! - általánositásával foglalkozik, természetesen szintén csak a szükséges minimumra korlátozódva.

3.1. Érintőnyaláb, vektormezők

A| Az M n -dimenziós sokaság $x \in M$ pontban vett érintő-tere

$$T_x(M) \doteq \{ v \in L(C^\infty(M), \mathbb{R}) \mid v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g) \}.$$

$T_x(M)$ értelemszerüen vektortér, mégpedig

$$\dim T_x(M) = \text{konst.} = \dim M.$$

Jól ismert, hogy ha $x^1, \dots, x^n$ az M sokaság $(\mathcal{U}, \psi)$ térképéhez tartozó lokális koordinátarendszer és $x \in \mathcal{U}$, akkor a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \; f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x f,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x f \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x \doteq D_i \left(f \circ \psi^{-1}\right)[\psi(x)]$$

/ D_i az $f \circ \psi^{-1} : \psi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény i -ik parciális deriváltja; $i = 1, \dots, n$ /

leképezések olyan x -beli érintővektorok, amelyek egy bázisát alkotják $T_x(M)$ -nek. - Ha speciálisan a $\xi = (E, \pi, B, F)$ r -rangu vektornyaláb $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezetének projekció-inverzén az

$$y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r} \quad (n = \dim B)$$

standard koordinátarendszert tekintjük, akkor tetszőleges $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ esetén a $T_z(E)$ érintőtér

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_z \right\}$$

bázisára mint standard bázisra fogunk hivatkozni.

B) Az M sokaság érintőnyalábja az a

$$\tau_M \doteq (TM, \pi_M, M, \mathbb{R}^n)$$

vektornyaláb, ahol

$$\pi_M^{-1}(x) \doteq T_x(M) \qquad (x \in M)$$

és igy

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x(M).$$

Amennyiben N egy további sokaság és

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

differenciálható leképezés, ugy φ differenciálján azt a

$$d\varphi : \tau_M \longrightarrow \tau_N$$

nyalábleképezést értjük, amelynek a fibrumokra való

$$(d\varphi)_x : T_x(M) \longrightarrow T_{\varphi(x)}(N) \qquad (x \in M)$$

leszükitéseit a

$$[(d\varphi)_x v](f) \doteq v(f \circ \varphi) \quad (v \in T_x(M), f \in C^\infty(N))$$

előirás adja meg. Amennyiben a $d\varphi : TM \longrightarrow TN$ leképezés injektiv, az (M, φ) párt beágyazott sokaságnak nevezzük; ha ráadásul $\varphi : M \longrightarrow \varphi(M) (\subset N)$ homeomorfizmus $\varphi(M)$ altértopológiájára nézve, ugy azt mondjuk, hogy (M, φ) részsokasága -nek. Az olyan (M, φ) részsokaságot, ahol M részhalmaza N -nek és $\varphi : M \longrightarrow N$ az inkluzió leképezés, (M, φ) helyett egyszerüen M részsokaságként említjük.

1. példa Legyen $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb számára, s tekintsük $\mathcal{U}$ -n az $x^1, \ldots, x^n$, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$-n pedig az $y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^{n+r}$ standard lokális koordinátarendszert. - Ekkor a $(d\pi)_z : T_z(E) \longrightarrow T_{\pi(z)}(B)$ $(z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}))$ lineáris leképezést a

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right\}, \quad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)}\right\}$$

bázisokra vonatkozóan az

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$n \times (n+r)$ -tipusu matrix reprezentálja.

- Valóban, az iménti értelmezés szerint

$$\left[(d\pi)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right](x^k) = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z (x^k \circ \pi) = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z (y^k) =$$

$$= \left(\frac{\partial y^k}{\partial y^i}\right)_z = \delta^k_i \quad (i, k = 1, \ldots, n);$$

$$\left[(d\pi)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right](x^k) = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z (x^k \circ \pi) = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z (y^k) =$$

$$= \left(\frac{\partial y^k}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = 0 \quad (k = 1, \ldots, n; \ \alpha = 1, \ldots, r)$$

2. példa. A τ_M érintőnyaláb esetében mód nyilik a vektornyalábok 2.5. szakaszban tárgyalt standard koordinátarendszerétől valamelyest eltérő, de szintén igen természetesnek mondható lokális koordinátarendszer bevezetésére.

- Alkalmas $\mathcal{U} \subset M$ nyilt halmaz alapulvétele után tekintsünk $\mathcal{U}$ -n egy $x^1, \ldots, x^n$ lokális koordinátarendszert s képezzük az $y^i, y^{n+j} : \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényeket az

$$\begin{cases} y^i \doteq x^i \circ \pi & (i = 1, \ldots, n), \\ y^{n+j}(z) \doteq z(x^j) & (z \in TM, \ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

előirás szerint. Ekkor $y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^{2n}$ lokális koordinátarendszer $\pi_M^{-1}(\mathcal{U})$ -n /ld. pl. DOMBROWSKI /1962//.

3. példa. Fibrált nyaláb fibrumai a totáltérnek részsokaságai.

C] A τ_M érintőnyaláb metszeteit az M sokaság vektormezőinek nevezzük és a $Sec\,\tau_M \doteq \mathcal{X}(M)$ jelölést használjuk. - A 8. állítás értelmében $\mathcal{X}(M)$ $C^\infty(M)$-modulus, emellett a vektormezők az

$$(Xf)(x) \doteq X(x)f \qquad / X \in \mathcal{X}(M),\ f \in C^\infty(M),\ x \in M /$$

előírással definiált $f \longmapsto Xf$ hozzárendelés szerint derivációkként hatnak a $C^\infty(M)$ algebrán. - Jelölje $Der\,C^\infty(M)$ a szóbanforgó algebra összes derivációi által alkotott $C^\infty(M)$ -modulust! Egyszerüen kimutatható /ld. pl. [GHV], Vol.I. p.106./, hogy az $\mathcal{X}(M)$ és a $Der\,C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-modulusok kanonikusan izomorfak: ilyen izomorfizmust ad közöttük a

$$\Theta:\ \mathcal{X}(M) \longrightarrow Der\,C^\infty(M),\ X \longmapsto \Theta_X;\ \Theta_X(f) \doteq Xf$$

leképezés. Mivel a $Der\,C^\infty(M)$ modulus a derivációk "kommutátor-szorzatára" nézve / $(D_1, D_2) \in Der\,C^\infty(M) \times Der\,C^\infty(M) \longmapsto$ $\longmapsto [D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ / ismeretesen valós Lie-algebra, az $\mathcal{X}(M) \overset{\Theta}{\cong} Der\,C^\infty(M)$ izomorfizmus Lie-algebra struktúrához vezet $\mathcal{X}(M)$ -en is, amelynél az $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektormezők $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ Lie-szorzatát az

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \qquad (f \in C^\infty(M))$$

formula irja le. Az

$$(X, Y) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longmapsto [X, Y] \in \mathcal{X}(M)$$

leképezés nyilván $\mathbb{R}$ -bilineáris és ferdeszimmetrikus s egyszerüen látható a Jacobi-identitás teljesülése is. Könnyen ellenőrizhető továbbá, hogy érvényes a későbbi gyakori alkalmazások miatt külön kiemelendő

13. állitás $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$[fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X \; ; \; [X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y .$$

4. példa. Ha $x^1, \dots, x^n$ lokális koordinátarendszer az M sokaság $\mathcal{U}$ nyilt halmazán, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{U} \longrightarrow \pi_M^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM, \; x \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x) \doteq \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T_x(M)$$

leképezések $\mathcal{U}$ fölötti vektormezők, amelyeket koordinátavektormezőkként fogunk emliteni. - A későbbiekben /ld. II./9. definició/ sor kerül majd a koordinátavektormezők mintegy vektornyalábokra való általánositására.

D| Legyen $p, q \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzitett. - A

$$\tau^p(M) \doteq \underbrace{\tau_M^* \otimes \dots \otimes \tau_M^*}_{p} \; , \quad p \geq 1$$

nyaláb metszeteit p-edrendü kovariáns tenzormezőknek nevezzük és az $\mathcal{X}^p(M) \doteq \mathrm{Sec}\,\tau^p(M)$ jelölést használjuk. A definiciót a $p = 0$ esetre az $\mathcal{X}^0(M) \doteq C^\infty(M)$ megállapodással terjesztjük ki. - Az M sokaság q-adrendü kontravariáns tenzormezőinek $C^\infty(M)$ -modulusa

$$\mathcal{H}_q(M) \doteq \operatorname{Sec} \tau_q(M),\ q \geq 1\ ;\ \mathcal{H}_0(M) \doteq C^\infty(M),$$

ahol

$$\tau_q(M) \doteq \tau_M \otimes \cdots \otimes \tau_M \quad (q \geq 1 \text{ tényező})$$

mig a (p,q)-tipusu – p -szer kovariáns, q -szor kontravariáns-tenzormezők $C^\infty(M)$ -modulusa az

$$\mathcal{H}_q^p(M) \doteq \operatorname{Sec} \tau_q^p(M),\quad \tau_q^p(M) \doteq \tau^p(M) \otimes \tau_q(M), \text{ ha } p,q \geq 1;$$

$$\mathcal{H}_q^0(M) \doteq \mathcal{H}_q(M),\quad \mathcal{H}_0^p(M) \doteq \mathcal{H}^p(M),\quad \mathcal{H}_0^0(M) \doteq C^\infty(M)$$

előirással nyer értelmezést.

Későbbi alkalmazásai miatt érdekes számunkra a

14. állitás Az $\mathcal{H}_q(M)$, ill. az $\mathcal{H}_q^1(M)$ modulus izomorf az $\mathcal{H}(M) \times \ldots \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ ill. az $\mathcal{H}(M) \times \ldots \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$ q -lineáris leképezések $C^\infty(M)$ -modulusával.

Bizonyitás. Ld. pl. [KN], Vol.I., p. 26. ▨

3.2. Differenciálformák sokaságon

A] A $\Lambda^p \tau_M^*$ $(p \geq 1 \in \mathbb{N})$ nyaláb metszeteit az M sokaság p -edrendű differenciálformáinak nevezzük

és a

$$\operatorname{Sec} \Lambda^p \tau_M^* \doteq A^p(M)$$

jelölést használjuk. - Eszerint $\Phi \in A^p(M)$ olyan

$$x \in M \longmapsto \Phi(x) \doteq \Phi_x$$

differenciálható leképezést jelent, ahol

$$\Phi_x : \underbrace{T_x(M) \times \cdots \times T_x(M)}_{p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris függvény. Az értelmezést a $p=0$ esetre is kiterjesztjük,

$$A^0(M) \doteq C^\infty(M)$$

megállapodással.

Tekintsük ezután az összes

$$\tilde{\Phi} : \underbrace{\mathcal{H}(M) \times \cdots \times \mathcal{H}(M)}_{p} \longrightarrow C^\infty(M)$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezések által alkotott $C^\infty(M)$ -modulust, jelölje ezt

$$A^p\big(\mathcal{H}(M), C^\infty(M)\big).$$

Az a

$$\Phi \in A^p(M) \longmapsto \tilde{\Phi} \in A^p\big(\mathcal{H}(M), C^\infty(M)\big)$$

leképezés, ahol

$$\big[\tilde{\Phi}(X_1, \ldots, X_p)\big](x) \doteq \Phi_x\big[X_1(x), \ldots, X_p(x)\big]$$
$$\big(X_1, \ldots, X_p \in \mathcal{H}(M), \ x \in M\big),$$

egy

$$\underline{A^p(M) \cong A^p\big(\mathcal{H}(M), C^\infty(M)\big)}$$

modulus – izomorfizmust ad, amelyet a szóbanforgó $C^\infty(M)$ -modulusok azonositására a továbbiakban minden külön kommentár nélkül alkalmazni fogunk.

B| A sokaság Grassmann-algebrája

Tekintsük az $A^p(M)$ $C^\infty(M)$ -modulusok

$$A(M) \doteq \sum_{p=0}^{n} A^p(M), \quad n = \dim M$$

direkt összegét. - $A(M)$ -et a

$$(\Phi, \Psi) \in A(M) \times A(M) \longmapsto \Phi \wedge \Psi \in A(M),$$

$$\Phi \wedge \Psi(x) \doteq \Phi(x) \wedge \Psi(x) \quad (x \in M)$$

előirással bevezetett <u>külső szorzás</u> a $C^\infty(M)$ gyürü fölötti /antikommutativ, graduált/ <u>algebrává</u> teszi, amelyet az M sokaság <u>külső</u> vagy <u>Grassmann-algebrájának</u> hivunk.

Megjegyezzük, hogy az <u>1.3.</u> szakaszban mondottakból következően tetszőleges $\Phi \in A^p(M)$, $\Psi \in A^q(M)$; $v_1, \dots, v_p$, $v_{p+1}, \dots, v_{p+q} \in T_x(M)$ esetén explicite

$$[\Phi \wedge \Psi(x)](v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\tau \in S_{p+q}} \varepsilon_\tau \, \Phi_x(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \Psi_x(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) =$$

$$[\mathfrak{A}(\Phi_x \otimes \Psi_x)](v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \quad (x \in M),$$

ahol a második egyenlőségre való áttérésnél fölhasználtuk azt a jól ismert tényt is /ld. pl.[Greub]p. 80-81./, hogy végesdimenziós E vektortér esetén a $\otimes^p L(E)$ p -ik tenzori hatvány izomorf az

$$E \times \dots \times E \longrightarrow \Gamma$$

p -lineáris függvények $T^p(E)$ vektorterével $(T^0(E) \doteq \Gamma,$ $T^1(E) \doteq L(E))$ s hogy a

$$T(E) \doteq \sum_{p \in \mathbb{N}} T^p(E)$$

direkt összeg a

$$(\varphi, \psi) \in T^p(E) \times T^q(E) \longmapsto \varphi \otimes \psi \in T^{p+q}(E)$$

$$\varphi \otimes \psi (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \doteq \varphi(x_1, \dots, x_p)\psi(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

$$(x_1, \dots, x_{p+q} \in E)$$

szorzással /egységelemes, asszociativ/ algebra.

C] Operátorok a Grassmann-algebrán

1° Helyettesitési operátor

Legyen $X \in \mathcal{X}(M)$ tetszőleges vektormező. Tekintsük azt az

$$i(X) : A(M) \longrightarrow A(M)$$

leképezést, amelyet az

$$f \in A^0(M) \equiv C^\infty(M) \longmapsto i(X)f \doteq 0,$$

$$\Phi \in A^p(M) \longmapsto i(X)\Phi \in A^{p-1}(M),$$

$$i(X)\Phi(X_2, \dots, X_p) \doteq \Phi(X, X_2, \dots, X_p)$$

$$(X_2, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M),\ p \geq 1)$$

előirás értelmez. - Ezt a leképezést az X vektormező által indukált helyettesitési operátornak hivjuk.

2° Külső deriválton olyan

$$\delta : A(M) \longrightarrow A(M),\ \Phi \in A^p(M) \longmapsto \delta\Phi \in A^{p+1}(M)$$

/$\mathbb{R}$ -lineáris/ leképezést értünk, amelyet a

$$\delta\Phi(X_0, X_1, \dots, X_p) \doteq \sum_{j=0}^{p} (-1)^j X_j\left[\Phi(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p)\right] +$$

$$+ \sum_{0 \leq i < j \leq p} (-1)^{i+j}\, \Phi([X_i, X_j], \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p)$$

formula definiál, ha $p \geq 1$ /a $\frown$ szimbólum ugy funkcionál, hogy az alatta levő tag törlendő az argumentumból/, mig tetszőleges $f \in C^{\infty}(M) \equiv A^0(M)$ esetén

$$(df)X \doteq Xf.$$

3.3. Nyalábértékü formák

Vegyük alapul az n -dimenziós bázissokaság fölötti, r -rangu $\xi = (E, \pi, B, F)$ /valós/ vektornyalábot. Tekintsük a B bázissokaság τ_B érintőnyalábját s képezzük azt az ugyancsak B bázisterü vektornyalábot, amelynek tetszőleges $x \in B$ pont fölötti fibruma az összes

$$\underbrace{T_x(B) \times \cdots \times T_x(B)}_{p} \longrightarrow F_x \doteq \pi^{-1}(x)$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezések vektortere. Jelöljük ezt a vektornyalábot $A^p(\tau_B; \xi)$ -vel! - A B sokaságon adott ξ -értékü p -formákon az $A^p(\tau_B; \xi)$ nyaláb metszeteit értjük és a

$$\underline{Sec\, A^p(\tau_B; \xi) \doteq A^p(B; \xi)}$$

jelölést használjuk, értelemszerüen megállapodva abban, hogy

$$A^0(B; \xi) \doteq Sec\, \xi.$$

- A mondottak szerint tetszőleges $\Omega \in A^p(B; \xi)$ olyan

$$x \in B \longmapsto \Omega(x) \doteq \Omega_x$$

differenciálható leképezést jelent, ahol

$$\Omega_x : \underbrace{T_x(B) \times \cdots \times T_x(B)}_{p} \longrightarrow F_x$$

ferdeszimmetrikus p -lineáris leképezés.

Jelölje $A^p_B(\mathcal{H}(B), \mathrm{Sec}\,\xi)$ az összes

$$\underbrace{\mathcal{H}(B)\times\cdots\times\mathcal{H}(B)}_{p} \longrightarrow \mathrm{Sec}\,\xi$$

p -lineáris leképezések $\underline{C^\infty(B)}$ -modulusát. Tetszőleges

$$\widetilde{\Omega} \in A^p_B(\mathcal{H}(B), \mathrm{Sec}\,\xi)$$

leképezésnek feleltessük meg azt az

$$\Omega \in A^p(B;\xi)$$

ξ -értékű p -formát, amelyre

$$\Omega_x(X_1(x),\dots,X_p(x)) \doteq [\widetilde{\Omega}(X_1,\dots,X_p)](x)$$
$$(X_1,\dots,X_p \in \mathcal{H}(B),\ x\in B).$$

Könnyen látható, hogy az így értelmezett $\Omega \longmapsto \widetilde{\Omega}$ leképezés egy

$$A^p(B;\xi) \cong A^p_B(\mathcal{H}(B);\mathrm{Sec}\,\xi)$$

izomorfizmust definiál, ami lehetővé teszi e $C^\infty(B)$ -modulusok azonosítását.

Tekintsük ezután az $A^p(B;\xi)$ modulusok

$$A(B;\xi) \doteq \sum_{p=0}^{n} A^p(B,\xi)$$

direkt összegét. $A(B;\xi)$ baloldali modulus a B sokaság $A(B)$ Grassmann-algebrája fölött, a

$$(\Phi,\Psi) \in A^p(B)\times A^q(B;\xi) \longmapsto \Phi\wedge\Psi \in A^{p+q}(B;\xi),$$

$$(\Phi\wedge\Psi)_x(v_1,\dots,v_{p+q}) \doteq \frac{1}{p!\,q!}\sum_{\tau\in S_{p+q}} \varepsilon_\tau\, \Phi_x(v_{\tau(1)},\dots,v_{\tau(p)})\Psi_x(v_{\tau(p+1)},\dots,v_{\tau(p+q)})$$
$$(v_1,\dots,v_{p+q} \in T_x(B),\ x\in B)$$

előirással megadott modulus-szorzás mellett. - Későbbi alkalmazásainkban szerepet kap /pl. a II./25. állitásnak már a kimondásánál is/ a

15. állitás Az $A(B;\xi)$ baloldali $A(B)$ -modulus izomorf az $A(B)$ és $\mathrm{Sec}\,\xi$ $C^\infty(B)$-modulusok

$$\underline{A(B)\otimes_{C^\infty(B)}\mathrm{Sec}\,\xi}$$

tenzori szorzataként adódó baloldali $\underline{A(B)}$ -modulussal, mégpedig a

$$\bar{\Phi}\otimes\sigma \in A(B)\otimes_{C^\infty(B)}\mathrm{Sec}\,\xi \longmapsto \bar{\Phi}\wedge\sigma \in A(B;\xi)$$

/$C^\infty(B)$ -bilineáris/ leképezés egy alkalmas izomorfizmus közöttük.

Bizonyitás. Az állitás helyessége könnyen verifikálható a [GHV] monográfia Vol. I./ 2.24. szakaszának eredményei alapján. ⦻

Megjegyzés Ha $\bar{\Phi}\in A^p(B)\,(p\geq 1)$, $\sigma\in\mathrm{Sec}\,\xi$, akkor a fentiek szerint

$$(\bar{\Phi}\wedge\sigma)_x(v_1,\dots,v_p)=\frac{1}{p!}\sum_{\tau\in S_p}\varepsilon_\tau\,\bar{\Phi}_x(v_1,\dots,v_p)\,\sigma(x)$$

$$(v_1,\dots,v_p\in T_x(B)\,,\ x\in B).$$

—— . ——

Megadva egy $X\in\mathcal{X}(B)$ vektormezőt, az $i(X)$ helyettesitési operátor kézenfekvő módon általánositható nyalábértékü formákra:

$$i(X):\ A(B;\xi)\longrightarrow A(B;\xi),$$

mégpedig

$$\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi \equiv A^0(B;\xi) \quad \text{esetén} \quad i(X)\sigma \doteq \sigma\,,$$

míg ha $p \geq 1 \in \mathbb{N}$, ugy

$$i(X) : A^p(B;\xi) \longrightarrow A^{p-1}(B;\xi)\,,\ \Omega \longmapsto i(X)\Omega\,;$$

$$\left[i(X)\right]_x (v_1,\dots,v_{p-1}) \doteq \Omega_x\left[X(x), v_1,\dots,v_{p-1}\right]$$

$$\left(v_1,\dots,v_{p-1} \in T_x(B)\,,\ x \in B\right).$$

Egyszerüen adódik az értelmezés alapján a

16. állítás Az $i(X) : A(B;\xi) \longrightarrow A(B;\xi)$ helyettesitési operátor $C^\infty(B)$ -lineáris leképezés és

$$i(fX) = f\,i(X) \quad \left(f \in C^\infty(B)\right),$$

$$i(X+Y) = i(X) + i(Y). \quad ⊘$$

II. HORIZONTÁLIS LEKÉPEZÉSEK GEOMETRIÁJA

1. Vertikális résznyaláb, vertikális lift, kanonikus vektormező

1. definició Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, z ξ totálterének tetszőleges pontja. - A

$$(d\pi)_z : T_z(E) \longrightarrow T_{\pi(z)}(B)$$

lineáris leképezés nullterét a $T_z(E)$ érintőtér *vertikális alterének* nevezzük és a

$$\underline{Ker(d\pi)_z \doteq V_z(E)}$$

jelölést használjuk. $V_z(E)$ elemeit *vertikális vektoroknak* hivjuk.

1. lemma

a/ A totáltér érintőtereinek vertikális alterei a fibrumtipussal megegyező dimenziójuak.

b/ Legyen $x \in B$ a bázissokaság tetszőleges pontja, j_x pedig jelentse az $F_x \doteq \pi^{-1}(x)$ fibrumnak az E totáltérbe való inkluzióját. - Ekkor

$$\forall z \in F_x : \quad \underline{V_z(E) = Im(dj_x)_z}.$$

Bizonyitás. Ld. [GHV], Vol.I. p. 280. ▨

Megjegyzés A lemma b/ részével kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy az I./2. példa szerint a fibrumok a totáltérnek részsokaságai!

<u>1. állitás</u> Adott $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb esetén egyértelmüen létezik a τ_ξ érintőnyalábnak olyan

$$V_\xi \doteq (VE, \pi_V, E, F)$$

résznyalábja, amelynek totáltere

$$VE \doteq \bigcup_{z \in E} V_z(E)$$

és ahol a projekciót a

$$\pi_V : VE \longrightarrow E, \quad a \in V_z(E) \longmapsto \pi_V(a) \doteq z$$

előirás adja; ezt a résznyalábot <u>τ_ξ vertikális résznyalábjának</u> mondjuk. V_ξ totálterének dimenziója $(\dim B + 2\dim F)$ - fel egyenlő.

<u>Bizonyitás</u>. Ld. [GHV] Vol.I., p.281. ▨

<u>2. definició</u> Egy $Z \in \mathcal{H}(E)$ vektormezőt <u>vertikális vektormezőnek</u> nevezzünk, ha

$$\forall z \in E : \quad Z(z) \in V_z(E).$$

<u>Megjegyzés</u> A vertikális vektormezők ilymódon a V_ξ nyaláb metszetei; értelmezésük is történhetett volna ennek megfelelően.

— . —

Föltéve, hogy ξ n -dimenziós bázissokaság fölötti r -rangu vektornyaláb s egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekcióinverzén alapulvéve az I.<u>2.5.</u> szakaszban leirt

$$y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$$

standard koordinátarendszert, megadjuk a vertikális vektorok és - vektormezők lokális jellemzését.

2. állitás

a/ Egy

$$a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \in T_z(E), \quad z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$$

vektor pontosan akkor vertikális, ha

$$a^1 = \ldots = a^n = 0,$$

azaz ha

$$\underline{a = a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z};$$

speciálisan a

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right)_z, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_z$$

vektorok bázisát alkotják $V_z(E)$-nek.

b/ Ha Z vertikális vektormező, akkor $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött lokálisan

$$\underline{Z = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}}$$

alakban áll elő, ahol $Z^\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$ koordinátavektormezők $(\alpha = 1, \ldots, r)$. Megforditva, minden ilyen lokális előállitással rendelkező vektormező vertikális.

c/ Vertikális vektormezők Lie-szorzata vertikális, következésképpen a vertikális vektormezők az $\mathcal{H}(E)$ Lie-algebra egy $\underline{\mathcal{H}_V(E)}$ részalgebráját alkotják.

Bizonyitás.

a/ Az értelmezés szerint és az I./1. példában mondottak figyelembevételével

$$a \in V_z(E) \Longleftrightarrow (d\pi)_z(a) = 0 \Longleftrightarrow a^i (d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z +$$

$$+ a^{n+\alpha}(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} = 0 \Longleftrightarrow a^1 = \ldots = a^n = 0.$$

b/ közvetlenül adódik a/ alapján.

c/ Legyen $Z = Z^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$ és $\bar{Z} = \bar{Z}^{\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}$ egy-egy tetszőleges, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölötti vertikális vektormező. - Az I./13. állitás ismételt alkalmazásával kapjuk:

$$\left[Z^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, \bar{Z}^{\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] = Z^{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, \bar{Z}^{\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] - \left[\left(\bar{Z}^{\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)Z^{\alpha}\right]\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} =$$

$$= Z^{\alpha}\left\{\bar{Z}^{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, \frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] + \frac{\partial \bar{Z}^{\beta}}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right\} - \bar{Z}^{\beta}\frac{\partial Z^{\alpha}}{\partial y^{n+\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} =$$

$$= Z^{\alpha}\frac{\partial \bar{Z}^{\beta}}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} - \bar{Z}^{\alpha}\frac{\partial Z^{\beta}}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} =$$

$$= \left(Z^{\alpha}\frac{\partial \bar{Z}^{\beta}}{\partial y^{n+\alpha}} - \bar{Z}^{\alpha}\frac{\partial Z^{\beta}}{\partial y^{n+\alpha}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} \in \mathcal{X}_v(E)$$ ⊘

—— . ——

Minden /valós/ vektortér természetes módon differenciálható sokaság, és ilyen értelemben beszélhetünk tetszőleges pontjában az érintőtérről. A következőkben gyakran szükségünk lesz ezen érintőtereknek a vektortérrel való azonositására, az identifikáció egy lehetséges módját irja le a

2. lemma Legyen F r -dimenziós vektortér, $x^1, \dots, x^r$ pedig F egy tetszőlegesen rögzitett bázisához duális bázisa a konjugált térnek. Tekintsük F -et sokaságnak az $x^1, \dots, x^r$ függvények szolgáltatta /globális/ koordinátarendszerrel. Legyen $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow F$, $\tau \longmapsto \sigma(\tau) \doteq x + \tau v$ a tetszőlegesen rögzitett $x \in F$ ponton átmenő $v (\neq 0)$ irányvektoru egyenes, $\frac{d}{dt} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}) \cong Der\, C^{\infty}(\mathbb{R})$ pedig az $\mathbb{R}$ sokaság

$$\left(\frac{d}{dt} f\right)(\tau) \doteq f'(\tau) \quad \left(f \in C^{\infty}(\mathbb{R}), \tau \in \mathbb{R}\right)$$

előirás által definiált vektormezője. - Ekkor az

$$\mathfrak{I}_x : F \longrightarrow T_x(F)\,, \quad v \longmapsto \mathfrak{I}_x(v) \doteq (d\pi)_0 \left(\frac{d}{dt}\right)_0$$

leképezés <u>lineáris izomorfizmus</u> F és $T_x(F)$ között.

Explicite:

$$\forall\ v \in F : \mathfrak{I}_x(v) = x^i(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x .$$

Az $\mathfrak{I}_x$ izomorfizmust az F és $T_x(F)$ közötti <u>identifikáló leképezésnek</u> mondjuk.

<u>Bizonyitás</u>. Ld. pl. [GKlM] , p.19.

<u>3. állitás</u> Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, tekintsük a τ_E érintőnyaláb $V_\xi = (VE, \pi_V, E, F)$ vertikális résznyalábját s a $\pi^*\xi = (N, \varrho, E, F)$ / $N \doteq \bigcup_{z\in E} F_{\pi(z)}$, $\varrho(a) \doteq z$, ha $a \in F_{\pi(z)}$ / indukált nyalábot.

→ A

$$\begin{tikzcd}
V_z(E) \arrow[rr, "(d j_x)^{-1}"] \arrow[dr, dashed, "\alpha_z"'] & & T_z(F_x) \arrow[dl, "\mathfrak{I}_z^{-1}"] \\
& F_x \equiv F_{\pi(z)} &
\end{tikzcd}$$

diagram által definiált $\alpha_z : V_z(E) \longrightarrow F_{\pi(z)}$ lineáris izomorfizmusok egy $\underline{V_\xi \cong \pi^*\xi}$ /kanonikus/ nyalábizomorfizmust, továbbá olyan $\alpha : V_\xi \longrightarrow \xi$ nyalábleképezést generálnak, amely a

$$\begin{tikzcd}
VE \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_V"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
E \arrow[r, "\pi"] & B
\end{tikzcd}$$

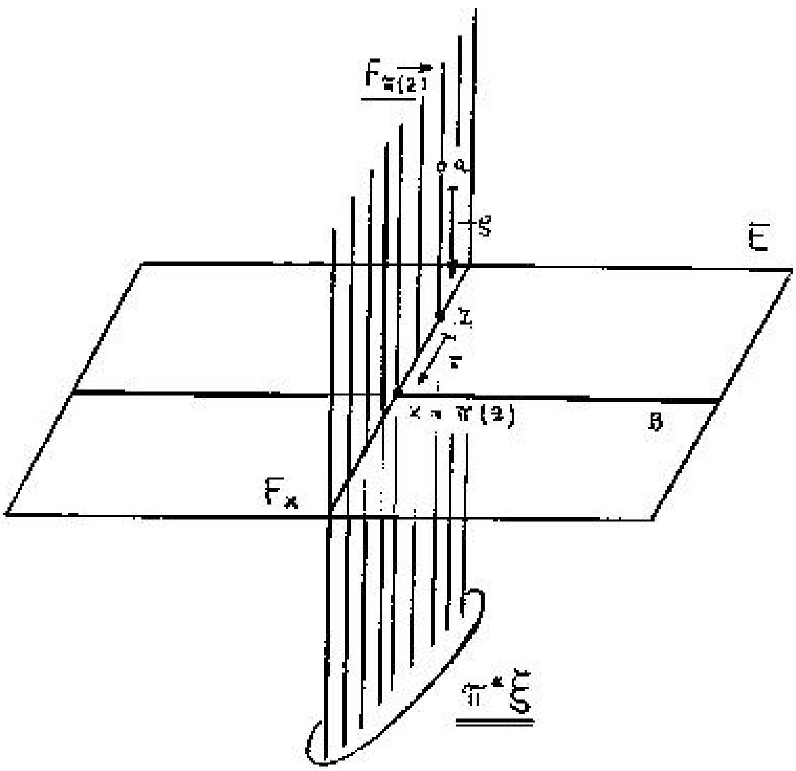
diagramot kommutativvá teszi.

Bizonyitás. $V_\xi \cong \pi^*\xi$ igazolásához az I./7. állitás alapján elég annyit megmutatni, hogy az α_z lineáris izomorfizmusok által generált $V_\xi \longrightarrow \pi^*\xi$ nyalábleképezés a közös E bázistéren diffeomorfizmust indukál. Ez azonban világos: $\forall\, z \in E$, $a \in V_z(E)$: $\alpha_z(a) \in F_{\pi(z)} \Rightarrow \varrho[\alpha_z(a)] = z$, s mivel $\pi_V(a) = z$, az indukált leképezés az $\iota: E \longrightarrow E$ identitás. - Hasonlóan egyszerüen látható, hogy $\alpha: V_\xi \longrightarrow \xi$ nyalábleképezés, amely az E és B bázissokaság között a $\pi: E \longrightarrow B$ projekciót indukálja.

Megjegyzések.

1/ A következőkben az $\alpha: V_\xi \longrightarrow V_\xi$ nyalábleképezésre mint kanonikus leképezésre is fogunk hivatkozni.

2/ Gyakori a vertikális részny aláb $\pi^*\xi$ indukált nyalábként történő értelmezése is. Az igy adódó alábbi szemléltetés megfoghatóvá teszi a "vertikális" jelzőt:



<u>3. definició</u> Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb. - Az

$$\ell^{v} : E \longrightarrow VE, \; z \longmapsto \ell^{v}(z) \doteq \alpha_{z}^{-1}(z)$$

leképezést <u>vertikális liftnek</u>, a

$$\underline{C \doteq i \circ \ell^{v} : E \longrightarrow TE}$$

leképezést pedig - ahol $i : VE \to TE$ az inkluzió - a totáltér <u>kanonikus vektormezőjének</u> hivjuk.

<u>Megjegyzések</u>

1/ A $\xi = \tau_{B}$ esetben GRIFONE /1972/ a kanonikus vektormezővel kapcsolatban KLEIN-VOUTIER /1968/-at jelöli meg forrásként, nem árt azonban rámutatni, hogy e szerzők konstrukciójával tartalmilag azonos a M. MATSUMOTO által - tőlük láthatóan függetlenül - bevezetett un. "intrinsic vertikális vektormező". /ld. [Ma], p.22./. Értelmezésünk τ_{B} -ről tetszőleges vektornyalábra általánosit a VILMS /1968/ és a [GHV] monográfia által egyaránt leirt ℓ^{v} leképezés segitségével. /Erre az utóbbi a "radiális vektormező" terminust alkalmazza; mi nem fogunk ezzel az elnevezéssel élni./

2/ A kanonikus vektormező igen hasznos szerephez jut bizonyos homogenitási feltételek megfogalmazásánál, ezt KLEIN-VOUTIER /1968/ és GRIFONE /1972/ egyaránt jól illusztrálja. C ilyen irányu fölhasználására fog nálunk is sor kerülni a 7. alfejezetben.

3/ Az értelmezésből világos, hogy mind a vertikális lift, mind a kanonikus vektormező <u>vertikális</u> vektormező:

$$\ell^V \in \mathcal{H}_V(E), \ C \in \mathcal{H}_V(E).$$

Lokális előállitásukat irja le a

4. állitás Legyen $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb számára s tekintsük $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ standard koordinátarendszert. Akkor $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött

$$\ell^V = C = y^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} .$$

Bizonyitás. Vegyük $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -nak egy tetszőleges, a határozottság kedvéért mondjuk az F_x fibrumba eső z pontját /amikor is tehát $\pi(z) = x \in \mathcal{U}$ /. Az $y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ koordinátafüggvények F_x -re való - változatlanul jelölt - leszükitései nyilvánvalóan /globális/ koordinátarendszerét alkotják az $F_x \subset E$ /vektortér-/ részsokaságnak /ld. még ezzel kapcsolatban a későbbi 3. alfejezetben szereplő 3.lemmát!/. - Mivel a $j_x : F_x \longrightarrow E$ inkluzió differenciáljának

$$(dj_x)_z : T_z(F_x) \longrightarrow T_z(E) \quad (z \in F_x)$$

leszükitései a

$$\left[(dj_x)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \right](y^{n+\beta}) = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z (y^{n+\beta} \circ j_x) = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z y^{n+\beta} = \delta^\beta_\alpha$$

összefüggések szerint hatnak /I. 3.1. B/, továbbá a 2.lemma szerint az

$$J_z : F_x \longrightarrow T_z(F_x)$$

identifikáló leképezést explicite az

$$J_z(\bar{z}) = y^{n+\alpha}(\bar{z}) \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \quad (\bar{z} \in F_x)$$

formula adja meg, a 3. állitásban mondottak figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\ell^{v}(z) \doteq \alpha_z^{-1}(z) = (dj_\alpha)_z\left[1_z(z)\right] = (dj_\alpha)_z\left[y^{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] =$$

$$= y^{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \left(y^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)(z). \quad ⊘$$

Megjegyzés Tegyük föl speciálisan, hogy $\xi = \tau_B$ s egy $\mathcal{U} \subset B$ nyilt halmaz alapulvétele után tekintsük $\pi_B^{-1}(\mathcal{U})$ -n az I./2. példában leirt $y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^{2n}$ lokális koordinátarendszert. Legyen $Z \in \pi_B^{-1}(\mathcal{U})$ tetszőleges, közelebbről mondjuk

$$Z = Z^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T_x(B), \quad x \in \mathcal{U}.$$

Az imént látottak és a választott koordinátarendszer specialitásának figyelembevételével ekkor

$$\ell^{v}(Z) = y^{n+i}(Z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_Z = Z(x^i)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_Z = Z^i\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_Z$$

irható.

Tekintettel későbbi előfordulásaira, de a vertikális fölemeléssel kapcsolatos áttekintésünk bizonyos foku teljessé tétele érdekében is, bevezetjük végül az $f \in C^\infty(B)$ függvények $C^\infty(E)$ -be való vertikális liftjének fogalmát /ahol E B bázisterü vektornyaláb totáltere/. Ehhez igen természetes módon, az érintőnyaláb differenciálgeometriájából ismert megfelelő liftelés /ld. [YaI], Ch.I. p.4./ közvetlen analogonjaként jutunk. Az értelmezést követően - ugyancsak [YaI] /Ch.I., p.6./ kézenfekvő általánositásaként - vertikálisan liftelt függvények segitségével egyszerü jellemzését adjuk a vertikális vektormezőknek.

<u>4. definíció</u> Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb s az $f \in C^\infty(B)$ függvény. - Az
$$f \circ \pi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
függvényt f $C^\infty(E)$ -be való <u>vertikális liftjének</u> nevezzük.

<u>Megjegyzések</u>

1/ Egy $f \in C^\infty(B)$ függvény vertikális liftjére az f^v jelölést is fogjuk használni. Közvetlenül látható, hogy
$$\forall f, g \in C^\infty(B): \quad (fg)^v = f^v g^v.$$
Ugyancsak nyilvánvaló az értelmezésből, hogy f^v ξ fibrumai fölött konstans, nevezetesen
$$\forall z \in F_x: \quad f^v(z) = f(x).$$

2/ A következőkben gyakran kell majd a bázissokaságon adott függvényeket a totáltérre fölemelnünk, ezt többnyire automatikusan, a vertikális lift néven nevezése nélkül tesszük. - Valójában függvény vertikális liftjével már eddig is volt dolgunk: a standard koordinátarendszer $y^1, \dots, y^n$ függvényei az $x^1, \dots, x^n$ koordinátafüggvények vertikális liftjei.

<u>5. állítás</u> A $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb totálterén adott Z vektormező akkor és csak akkor vertikális, ha
$$\forall f \in C^\infty(B): \quad Z f^v = 0.$$

<u>Bizonyítás</u> Egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet kiválasztása és $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ standard koordinátarendszer alapulvétele után lokálisan okoskodunk.

a/ Ha $Z \in \mathcal{H}_v(E)$, akkor a 2./b/ állitás szerint $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött

$$Z = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}},$$

s igy

$$\forall\ z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}):\ (Zf^v)(z) = Z(z)f^v = Z^\alpha(z)\left.\frac{\partial(f\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}}\right|_z =$$

$$= Z^\alpha(z)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\pi\cdot\frac{\partial(x^i\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}}\right)(z) =$$

$$= Z^\alpha(z)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\pi\cdot\frac{\partial y^i}{\partial y^{n+\alpha}}\right)(z) = 0.$$

b/ Legyen adva a $Z = Z^i\frac{\partial}{\partial y^i} + Z^\alpha\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$ vektormező s tegyük föl, hogy - megforditva -

$$\forall\ f \in C^\infty(\mathcal{U}):\ Zf^v = \sigma.$$

Mivel

$$Zf^v = Z^i\frac{\partial(f\circ\pi)}{\partial y^i} + Z^\alpha\frac{\partial(f\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} = Z^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\circ\pi\right)\frac{\partial(x^k\circ\pi)}{\partial y^i} +$$

$$+ Z^\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\circ\pi\right)\frac{\partial(x^k\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} = Z^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\pi\right) = Z^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^v,$$

feltételünk azt jelenti, hogy

$$\forall\ f \in C^\infty(\mathcal{U}):\ Z^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^v = \sigma,$$

amiből - pl. $f = x^k$; $k = 1,\dots,n$ választással - a Z^i függvények σ volta s igy $Z \in \mathcal{H}_v[\pi^{-1}(\mathcal{U})]$ következik. ◍

2. Horizontális leképezés, horizontális lift

6. állitás Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, tekintsük a B bázistér $\tau_B = (TB, \pi_B, B, \mathbb{R}^n)$ érintőnyalábját, valamint a $\pi: E \longrightarrow B$ leképezés által indukált $\pi^*(\tau_B)$ nyalábot /tehát azt az E bázisterü vektornyalábot, amelynek tetszőleges $z \in E$ pont fölötti fibruma az $\mathbb{R}^n_{\pi(z)} = \pi_B^{-1}[\pi(z)] = T_{\pi(z)}(B)$ vektortér/. - Ekkor a

$$(d\pi)_z : T_z(E) \longrightarrow T_{\pi(z)}(B)$$

leképezések egy

$$\widetilde{d\pi} : \tau_E \longrightarrow \pi^*(\tau_B)$$

erős nyalábleképezést generálnak és a

$$\boxed{0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0}$$

vektornyaláb-sorozat /ahol i inkluziót jelöl/ <u>rövid egzakt sorozat</u>.

<u>Bizonyitás</u> A leirt konstrukció és a vertikális résznyaláb értelmezése /1. definició, 1. állitás/ alapján közvetlenül adódnak a tett kijelentések. ⊘

<u>Megjegyzés</u>. A $\widetilde{d\pi}$ nyalábleképezés E -n adott $\pi^*(\tau_B)$ - értékü 1 -formaként is interpretálható /azaz $\widetilde{d\pi} \in A^1(E, \pi^*(\tau_B))$ irható/, hiszen egyuttal

$$z \in E \longmapsto \widetilde{d\pi}(z) \doteq (d\pi)_z \,, \quad (d\pi)_z \in L[T_z(E), T_{\pi(z)}(B)]$$

megfeleltetésként fogható föl.

<u>5. definició</u> A $\underline{0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0}$ vektornyaláb-sorozat levágásait /"split"-jeit/ <u>horizontális leképezéseknek</u> nevezzük.

<u>Megjegyzések</u>

1/ Horizontális leképezésre végig a $\mathcal{H}$ jelölést fogjuk használni. Igy az értelmezésnek megfelelően

$$\mathcal{H} : \pi^*(\tau_B) \longrightarrow \tau_E \,, \quad \widetilde{d\pi} \circ \mathcal{H} = 1_{\pi^*(\tau_B)} .$$

Gyakran élünk majd a következő szó- és jelöléshasználattal: "Adott egy

$$0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\xrightarrow{\widetilde{d\pi}}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$$

horizontális leképezés." Végül egy $\mathcal{H}$ horizontális leképezésnek a $z \in E$ pontok fölötti fibrumokra való leszükitéseit $\mathcal{H}_z$ -vel jelöljük, igy $\forall z \in E : \mathcal{H}_z \in L\left[T_{\pi(z)}(B), T_z(E)\right]$.

2/ Az ujabb keletü /"modernebb szemléletü"/ munkák legtöbbje a 6. állitásban leirt - vagy azzal izomorf - egzakt vektornyalábsorozatra és a horizontális leképezésre - illetőleg lényegében arra - alapozza konnexióelméleti vizsgálatait, igy például a számunkra különösen hasznos impulzusokat adó VILMS /1968/ és GRIFONE /1972/ dolgozatokban is ilyen kiindulóponttal találkozunk /bár az utóbbi végig a $\xi = \tau_B$ esetet tárgyalja, mig az előbbi Banach-téren modellez, s ezek nem elhanyagolható eltérések/. Maga az ötlet kevésbé uj: az 50-es évek óta mintegy "benne van a levegőben". Tartalmilag a τ_E érintőnyaláb vertikális és horizontális résznyalábokra való direkt fölbontásának gondolata a döntő mozzanat, ennek világos fölismerése legalább EHRESMANN /1950/-ig nyulik vissza. A formábaöntés módján erőteljes kategóriaelméleti behatás érződik, az ilyen áramlatok ugyancsak az 50-es évektől kezdve erősödtek föl. Elég nehéznek látszik annak az egyértelmü eldöntése is, hogy tartalom és forma mikor s kinél találkozott először pontosan ugy, ahogyan azt a 6. állitás és a ráépülő értelmezés rögziti. Egy "tájékozódási pontot" emlitünk: a méltán sokat idézett ATIYAH /1957/ dolgozat már a "split"-re alapoz – s ez eléggé korai és fontos nyom a gyökerek kutatásához. - Mindebben jól tükröződik az alapgondolatok többirányu eredete és szoros összefonódása; ezt a jellegzetességet találó szóval emlithetjük fogalmi rendszerünk "folklorisztikus" vonásaként.

Tárgyalásunk során konzekvensen a horizontális leképezésre épitünk, a szükséges - és lehetséges - teljesség igényével. Munkánkhoz a "panelek" szinte mindenütt rendelkezésre állnak, feladatunk egyfelől ezek alkalmas kiválogatása és összeillesztése, másfelől a részletek pontos kidolgozása lesz.

—— . ——

A most következő fogalomalkotás - a <u>horizontális résznyaláb</u> értelmezése - s a hozzá kapcsolódó állitás lehetővé teszi a "levágás" által létrehozott geometriai szituáció érzékletesebb megragadását.

<u>6. definició</u> Vertikális résznyaláb Whitney-komplementumait <u>horizontális résznyaláb</u>oknak nevezzük.

Adott horizontális résznyaláb fibrumait <u>horizontális altereknek</u>, ezek elemeit <u>horizontális vektorok</u>nak mondjuk. Ha egy vektormező az alapulvett vektornyaláb totálterén van értelmezve és értékeit a horizontális alterekben veszi föl, <u>horizontális vektormező</u>nek hivjuk.

<u>Megjegyzések</u>

1/ Emlékeztetünk rá, hogy az I./10. állitás szerint vektornyaláb minden résznyalábja föllép Whitney - összeadandóként!

2/ $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb esetén τ_E horizontális résznyalábját H_ξ -vel, H_ξ fibrumait - a horizontális altereket - $H_z(E)$ -vel $(z \in E)$, a horizontális vektormezők halmazát $\mathcal{H}_H(E)$ -vel jelöljük. Ekkor tehát a definició értelmében

$$H_\xi \oplus V_\xi = \tau_E ;$$

$$\forall z \in E : \quad H_z(E) \oplus V_z(E) = T_z(E) ;$$

$$\forall Z \in \mathcal{H}_H(E) : \quad Z(z) \in H_z(E) \quad (z \in E).$$

Természetesen - a 2. definiciót követő megjegyzés észrevételéhez hasonlóan - most is fennáll az $\mathcal{H}_H(E) = \mathrm{Sec}\, H_\xi$ előirás szerinti értelmezés lehetősége.

3/ H_ξ horizontális résznyaláb

$$HE = \bigcup_{z \in E} H_z(E)$$

totáltere $/2\dim B + \dim F/$-dimenziós, hiszen az E bázissokaság dimenziója $\dim B + \dim F$, a fibrumok pedig $\dim B$ -dimenziósak. Igy

$$H_\xi = (HE, \pi_H, E, \mathbb{R}^n) \quad (n = \dim B)$$

irható.

<u>7. állitás</u> Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés!

a/ Az az E bázisterü vektornyaláb, amelynek tetszőleges $z \in E$ pont fölötti fibruma az

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{H}_z \subset T_z(E)$$

altér, <u>horizontális résznyalábja</u> τ_E -nek. E résznyalábot $\mathcal{H}$ <u>képterének</u> nevezzük és rá az <u>$\mathrm{Im}\,\mathcal{H}$</u> jelölést alkalmazzuk.

b/ A $d\pi$ nyalábleképezés $\mathrm{Im}\,\mathcal{H}$ -ra való leszükitése egy

$$\widetilde{d\pi}\Big|_{\operatorname{Im}\mathcal{H}} : \operatorname{Im}\mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \pi^*(\tau_B)$$

erős nyalábizomorfizmust ad.

c/ A τ_E érintőnyaláb minden horizontális résznyalábja egy egyértelmüen meghatározott horizontális leképezés képtere.

Bizonyitás.

a/ Az I.5./d/ definició feltételének ellenőrzésével azonnal látható, hogy $\operatorname{Im}\mathcal{H}$ résznyalábja τ_E -nek. Megmutatjuk, hogy

$$\forall z \in E : \; T_z(E) = V_z(E) \oplus \operatorname{Im}\mathcal{H}_z .$$

- Feltételünk szerint tetszőleges $z \in E$ esetén a

$$0 \longrightarrow V_z(E) \xrightarrow{i} T_z(E) \underset{\mathcal{H}_z}{\overset{(d\pi)_z}{\rightleftarrows}} T_{\pi(z)}(B) \longrightarrow 0$$

sorozat levágott rövid egzakt sorozat. Igy az I./1. definiciót követő 1/ észrevétel szerint $(d\pi)_z$ szürjekció, tehát

$\forall a \in T_z(E)$-hez $\exists$ egyetlenegy $v \in T_{\pi(z)}(B) : (d\pi)_z(a) = v$

Tekintsük az

$$a = \mathcal{H}_z(v) + [a - \mathcal{H}_z(v)]$$

identitást! Itt - fölhasználva, hogy $(d\pi)_z \circ \mathcal{H}_z = i_{T_{\pi(z)}(B)}$ -

$$(d\pi)_z[a - \mathcal{H}_z(v)] = (d\pi)_z(a) - (d\pi)_z[\mathcal{H}_z(v)] = v - v = 0 ,$$

ami azt jelenti, hogy $a - \mathcal{H}_z(v) \in V_z(E)$, következőleg

$$T_z(E) = \operatorname{Im}\mathcal{H}_z + V_z(E).$$

Ez az összeg azonban direkt, hiszen ha $a \in \operatorname{Im}\mathcal{H}_z \cap V_z(E)$, akkor $a \in \operatorname{Im}\mathcal{H}_z$ miatt $a = \mathcal{H}_z(v)$ $(v \in T_{\pi(z)}(B))$ irható, s igy $a = \mathcal{H}_z(v) \in V_z(E)$ arra vezet, hogy $(d\pi)_z(a) = v = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \mathcal{H}_z(0) = 0$.

Ilymódon $\underline{\tau_E = V_E \oplus \operatorname{Im}\mathcal{H}}$, tehát az $\operatorname{Im}\mathcal{H}$ résznyaláb horizontális.

b/ Az a/-ban igazoltak figyelembevételével a $\widetilde{d\pi}: \tau_E \longrightarrow \pi^*(\tau_B)$ nyalábleképezés fibrumokra való leszükitései a

$$(d\pi)_z : V_z(E) \oplus \operatorname{Im} \mathcal{H}_z \longrightarrow T_{\pi(z)}(B)$$

lineáris szürjekciók. Mivel itt $V_z(E) = \operatorname{Ker}(d\pi)_z$, következik, hogy a

$$(d\pi)_z \Big|_{\operatorname{Im} \mathcal{H}_z} : \operatorname{Im} \mathcal{H}_z \longrightarrow T_{\pi(z)}(B)$$

leszükitések lineáris izomorfizmusok. Tekintettel arra, hogy $\widetilde{d\pi}\big|_{\operatorname{Im} \mathcal{H}}$ $\operatorname{Im} \mathcal{H}$ és $\pi^*(\tau_B)$ közös E bázisterén az identitást indukálja, az I./7. állitásra való hivatkozással

$$\widetilde{d\pi}\Big|_{\operatorname{Im} \mathcal{H}} : \operatorname{Im} \mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \pi^*(\tau_B)$$

erős nyalábizomorfizmus.

c/ Amennyiben τ_E -nek egy H_ξ horizontális résznyalábja van megadva, ugy a $d\pi: TE \longrightarrow TB$ leképezés HE -re való leszükitése olyan $H_\xi \xrightarrow{\cong} \pi^*(\tau_B)$ erős nyalábizomorfizmushoz vezet, amelynek inverze a kivánt horizontális leképezés.▨

Megjegyzések

1/ Az a/-ban mondottak mintájára általában is beszélhetünk - s fogunk is beszélni - egy $\varphi: \bar{\xi} \longrightarrow \xi$ erős nyalábleképezés $\operatorname{Im}\varphi$ képteréről, ami ξ -nek résznyalábja. Hasonlóképpen tekinthető φ nulltere, ez $\bar{\xi}$ -nak olyan $\operatorname{Ker}\varphi$ résznyalábja, amelynél a közös bázistér tetszőleges z pontja fölötti fibrum a $\operatorname{Ker}\varphi_z$ vektortér.

2/ Emlitettük, hogy tárgyalásunkat a horizontális leképezésre épitjük. Ennek megfelelően a következőkben horizontális résznyaláb /altér, vektor, vektormező/ mindig egy adott /és rögzitett/ horizontális leképezés által meghatározott horizontális résznyalábként /altérként, vektorként, vektormezőként/ fog jelentkezni. - Egy $\mathcal{H}$ horizontális leképezésre vonatkozóan horizontális vektormezők modulusára az $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(E)$ jelölést is alkalmazzuk.

<u>7. definició</u> Legyen adva a $0 \longrightarrow V_{\xi} \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés. - A

$$\widetilde{d\pi}\big|_{\operatorname{Im}\mathcal{H}} : \operatorname{Im}\mathcal{H} \xrightarrow{\cong} \pi^*(\tau_B)$$

nyalábizomorfizmus

$$\ell^h : \pi^*(\tau_B) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}\mathcal{H}$$

inverzét $\mathcal{H}$ -hoz tartozó <u>horizontális liftnek</u> nevezzük.

Egy $X \in \mathcal{X}(B)$ <u>vektormező $\mathcal{H}$ általi liftjén</u> azt az X^h vektormezőt értjük, amelyre

$$\forall z \in E : X^h(z) = \ell^h_z X_{\pi(z)}.$$

<u>Megjegyzés</u> A horizontális, a már emlitett vertikális továbbá az un. teljes liftnek kiterjedt elmélete van a $\xi = \tau_B$ ill. $\xi = \tau_B^*$ speciális esetben. Ez az elmélet az "érintő- és koérintőnyaláb differenciálgeometriája"; gyökerei meglehetős /és meglepő/ egyértelmüséggel jelölhetők ki a SASAKI /1958/ és DOMBROWSKI /1962/ dolgozatokban. A továbbfejlesztők közül talán E.T.DAVIES, E.M.PATTERSON valamint Sh. ISHIHARA és K.YANO nevét kell elsőnek emliteni; utóbbiak egyben megadták a 70-es évek elejéig elért eredmények monografikus összefoglalását /ld. [YaI] /. A terület napjainkban is intenziv kutatás tárgyát képezi. - A most beve-

zetett ℓ^h leképezés közvetlen általánositása az érintőnyaláb differenciálgeometriájából jól ismert horizontális liftnek. Ez az általánositás magától értetődő természetességgel adódik, de az ötlet VILMS /1968/-ban is föllelhető.

8. állitás A
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_\xi \arrow[r, "i"] & \tau_E \arrow[r, "d\pi"] & \pi^*(\tau_B) \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\mathcal{H}"] & 0 \end{tikzcd}$$
horizontális leképezéshez egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet s ezen ill. a projekció-inverzén definiált /szokásos/ lokális koordinátarendszerek alapulvétele után egyértelmüen megadhatók olyan

$$\Gamma^{\alpha}_{i} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \longmapsto \Gamma^{\alpha}_{i}(z) \quad (i = 1, \dots, n,\ \alpha = 1, \dots, r)$$

differenciálható függvények, hogy tetszőleges $z \in \mathcal{U}$ esetén $\mathcal{H}_z$ matrixa

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline & \boxed{-\Gamma^{\alpha}_{i}(z)} & & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \updownarrow n \\ \\ \\ \\ \updownarrow r \end{array} \\ \longleftarrow n \longrightarrow & \end{array}$$

alaku. - E matrixokról azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ lokális leirását szolgáltatják, a Γ^{α}_{i} függvényeket pedig $\mathcal{H}$-hoz tartozó konnexió-paramétereknek hivjuk.

Bizonyitás. Mivel

$$\forall z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) : \ \mathcal{H}_z : T_{\pi(z)}(B) \longrightarrow T_z(E)$$

lineáris leképezés, $T_{\pi(z)}(B)$ és $T_z(E)$ $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\pi(z)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{\pi(z)}$ ill. $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_z$ bázisának rögzitése után egyértelmüen megadható olyan $\left(\partial^{A}_{i}(z)\right)_{(n+r)\times n}$ -tipusu matrix, hogy

$$\mathcal{H}_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} = \gamma^A_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\right)_z .$$

Figyelembe véve, hogy

$$(d\pi)_z \circ \mathcal{H}_z = \iota_{T_{\pi(z)}(B)}$$

és hogy az I./1. példában mondottak szerint

$$(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{illetve}$$

$$(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r) \quad ;$$

$$(d\pi)_z\left[\mathcal{H}_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)}\right] = \gamma^A_i(z)\left[(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\right)_z\right] = \gamma^j_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\pi(z)} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)}$$

irható, amiből

$$\underline{\gamma^j_i = \delta^j_i} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

következik. – Világos ezek után, hogy a

$$\Gamma^\alpha_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ z \longmapsto \Gamma^\alpha_i(z) \doteq -\gamma^{n+\alpha}_i(z)$$

$$(i = 1, \ldots, n\ ;\ \alpha = 1, \ldots, r)$$

függvények /a „–" előjelet tradicionális okokból szerepeltetjük!/, éppen a kivánt tulajdonságuak. ▨

<u>Következmény</u> A $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$ $(i = 1, \ldots, n\ ;\ z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}))$ vektorok bázisát alkotják $H_z(E)$ -nek, s igy $T_z(E)$ vektorai közül pontosan azok a horizontálisak, amelyek

$$a^i\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] \qquad (a^i \in \mathbb{R})$$

alakuak a standard koordinátarendszerben.

Bizonyitás. Az állításból kiolvasható, hogy a
$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$ vektorok valóban horizontálisak.

$$\lambda^i\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = 0 \implies \lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0 ,$$

hiszen $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_z$ bázisa $T_z(E)$ -nek.
Ilymódon a tekintett vektorrendszer maximális független rendszere $H_z(E)$ -nek. ▨

9. állítás A bázissokaság $\mathcal{U}$ trivializáló környezete fölött adott $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektormező horizontális liftje az

$$X^h = (X^i \circ \pi)\left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma^{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right) = (X^i)^v\left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma^{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)$$

$\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölötti vektormező.

Bizonyitás. Mivel az I./1. példa alapján

$$(d\pi)_z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = (d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} ,$$

továbbá a 7. definiciónak megfelelően

$$\ell^h_z = \left((d\pi)_z\big|_{H_z(E)}\right)^{-1} : T_{\pi(z)}(B) \longrightarrow H_z(E)$$

lineáris izomorfizmus s igy bázist bázisba visz, az iménti következményt is figyelembe véve

$$\ell^h_z\left[X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)}\right] = X^i(x)\,\ell^h_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} =$$

$$= X^i(x)\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]$$

irható, ahol a jobboldal nem más, mint $X^h(z)$. ▨

Megjegyzés. Ha $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet az alapulvett $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb számára; $x^1, \dots, x^n$ lokális koordinátarendszer $\mathcal{U}$ -n; $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ pedig a standard lokális koordinátarendszer $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n, akkor tetszöleges $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ esetén rendelkezésünkre áll a $T_z(E)$ érintőtér

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_z, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_z$$

standard bázisa. A most elmondottak és a 2.a/ állitás alapján azonban bázisát alkotják $T_z(E)$ -nek a

$$\underline{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h} \quad (i=1,\dots,n) \;,\; \underline{\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z} \quad (\alpha = 1,\dots,r)$$

vektorok is. Ez utóbbi bázis az érintőnyaláb differenciálgeometriájában kiterjedten használt <u>adaptált bázis</u> /"adapted frame", ld. pl. [YaI], Ch.II.§4./ általánositása. Az adaptált bázis a <u>standard bázisban</u>

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h : \begin{bmatrix} \delta_i^j \\ \\ \Gamma_i^\alpha(z) \end{bmatrix} , \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z : \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \delta_\alpha^\beta \end{bmatrix}$$

alakban adható meg. Vektormező horizontális liftje az <u>adaptált bázisban</u>

$$X^h = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h : \begin{bmatrix} (X^i)^v \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

alaku.

<u>10. állitás.</u> Tetszöleges $X \in \mathcal{X}(B)$, $f \in C^\infty(B)$ esetén

$$\underline{X^h f^v = (Xf)^v}.$$

<u>Bizonyitás.</u> $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet és a standard koordinátarendszer alapulvétele után lokálisan okoskodunk. Ekkor $\mathcal{U}$ fölött $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, s igy a 9. állitás szerint

$$X^h = X^i \circ \pi \left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma^{\alpha}_{i} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} \right),$$

ennek megfelelően

$$\begin{aligned} X^h f^v &= X^i \circ \pi \left(\frac{\partial (f\circ\pi)}{\partial y^i} - \Gamma^{\alpha}_{i} \frac{\partial (f\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} \right) = \\ &= X^i \circ \pi \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\circ\pi \, \frac{\partial (x^k\circ\pi)}{\partial y^i} - \Gamma^{\alpha}_{i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\circ\pi\right) \frac{\partial (x^k\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} \right) = \\ &= (X^i\circ\pi)\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\pi\right) = (X^i)^v \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^v = \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^v = \\ &= (Xf)^v , \end{aligned}$$

figyelembe véve a 4. definiciót követő 1/ megjegyzést is. ⊘

<u>Megjegyzés</u>. A levezetett összefüggés [YaI], Ch. II.prop. 1.1.a/ általánositása.

3. Vertikális- és konnexióleképezés

<u>8. definició</u>. Legyen adva a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_\xi \arrow[r, "i"] & \tau_E \arrow[r, "d\pi"] & \pi^*(\tau_B) \arrow[l, bend left, dashed, "\mathcal{H}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

horizontális leképezés!

a/ A <u>$\mathcal{H}$-hoz tartozó vertikális leképezésen</u> azt a

$$\mathcal{V} : \tau_E \longrightarrow V_\xi$$

nyalábleképezést értjük, amelyre

1° $\operatorname{Ker} \mathcal{V} = \operatorname{Im} \mathcal{H}$,

2° $\mathcal{V} \circ i = 1_{V_\xi}$

b/ Amennyiben $\mathcal{V}$ a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó vertikális leképezés és $\alpha : V_\xi \longrightarrow \xi$ a kanonikus leképezés, ugy a

$$\underline{K \doteq \alpha \circ \mathcal{V}} ,$$

$$\begin{tikzcd} \tau_E \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "K"'] & V_\xi \arrow[d, "\alpha"] \\ & \xi \end{tikzcd}$$

nyalábleképezést a $\mathcal{H}$ horizontális leképezéshez tartozó <u>konnexióleképezésnek</u> nevezzük.

<u>Megjegyzések</u>

1/ A vertikális <u>leképezés</u> természetesen egészen mást jelent, mint az 1. pontban bevezetett ℓ^V vertikális <u>lift</u>. ℓ^V független a τ_E érintőnyaláb $\tau_E = V_\xi \oplus H_\xi$ direkt fölbontásának módjától, mig a vertikális leképezést a horizontális leképezés határozza meg. Könnyü látni /ebben a lokális leirás is meg fog erősiteni bennünket/, hogy minden horizontális leképezéshez <u>egyértelmüen</u> tartozik egy vertikális leképezés és hogy a

$$0 \longleftarrow V_\xi \xleftarrow[\mathcal{V}]{} \tau_E \xleftarrow[\mathcal{H}]{} \pi^*(\tau_B) \longleftarrow 0$$

vektornyaláb-sorozat ugyancsak rövid egzakt sorozat. - Természetesen semmi akadálya sincs az elmélet olyan fölépitésének, amely a $0 \longrightarrow V_\xi \longrightarrow \tau_E \longrightarrow \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ rövid egzakt vektornyaláb-sorozat egy $\underline{\mathcal{V} : \tau_E \longrightarrow V_\xi}$ <u>levágás</u>ából indul ki.

2/ Minden vertikális leképezés interpretálható az E totáltéren adott V_ξ -értékü 1 -formaként, azaz

$$\mathcal{V} \in A^1(E, V_\xi)$$

irható, ha $\mathcal{V}$ -t a

$$z \in E \longmapsto \mathcal{V}_z \in L\left[T_z(E), V_z(E)\right]$$

leképezésként fogjuk föl.

3/ A K leképezés fibrumokra való leszükitéseit illetően a 3. állitásban mondottak figyelembevételével az alábbi diagram irható föl:

$$
\begin{tikzcd}
V_z(E) \arrow[r, "(dj_x)^{-1}"] \arrow[dr] & T_z(F_x) \arrow[d, "j_z^{-1}"] \\
T_z(E) \arrow[u, "\mathcal{V}_z"] \arrow[r, dashed, "K_z"'] & F_x \cong F_{\pi(z)}
\end{tikzcd}
$$

4/ A K konnexióleképezést néhány cikkben - ld. pl. CADDEO /1979/ vagy IANUS /1973/ - Dombrowski-leképezésként is említik. E fontos leképezés összekapcsolása Peter DOMBROWSKI nevével valóban indokolt, hiszen első fölbukkanásának helye /kivételes egyértelmüséggel/: DOMBROWSKI /1962/. A szerző ebben a munkájában - amely sok későbbi kutatás szempontjából bizonyult igen ösztönzőnek - egyrészt megadott KOSZUL-konnexióból kiindulva származtatott le konnexióleképezést, másrészt az érintőnyaláb bizonyos homogenitási feltételnek eleget tevő disztribuciójából kiindulva konstruált olyan K leképezést, amely KOSZUL-konnexiót indukál.

A konnexióleképezés KOSZUl-konnexióból történő leszármaztatása megtalálható [GKlM] -ben is /Kap.2.4./, annak hangsulyozásával, hogy ez nem egy pusztán technikai érdekességü aktus, és ugyancsak szerepel az az észrevétel, miszerint alkalmas megszoritások után a konnexióleképezés meghatározza a KOSZUL-konnexiót, lehetővé téve igy annak egy alternativ értelmezését. Ez az alternativ megközelités végtelen dimenziós, azaz Hilbert- vagy Banach-vektornyalábok esetén válik igazán jelentőségteljessé - az előbbit illetően ld. [FlKl], az utóbbit illetően pedig ELIASSON /1967/-re utalunk. E munkák a <u>lineáris</u> esetet tárgyalják, sajátos lokális technikát alkalmazva, amelynek kifejlesztése talán [Lang]-re nyulik vissza. - Emlitést érdemel még egy egészen friss dolgozat: ANASTASIEI /1980/ a [KN], Vol.I.p.127. értelemben vett <u>affin</u> konnexiót általánositja a konnexióleképezés nyelvezetével Banach-vektornyalábokra.

Az általunk követett ut ezen a ponton DOMBROWSKI /1962/ és VILMS /1968/ eljárásával mutat szoros rokonságot, de az előbbinél általánosabb szituációban dolgozunk, az utóbbival szemben pedig szükségképpen eltérésekre vezetett az a körülmény, hogy a véges dimenzió föltételezése folytán másfajta technikai megoldásokat láttunk célszerünek.

<u>**11. állitás**</u> Ha $\underline{\vartheta : \tau_E \longrightarrow V_\xi}$ a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_\xi \arrow[r, "i"] & \tau_E \arrow[r, "\widetilde{d\pi}"] & \pi^*(\tau_B) \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\mathcal{H}"] & 0 \end{tikzcd}$$

horizontális leképezéshez tartozó vertikális leképezés és a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó konnexióparaméterek a

$$\Gamma_i^\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

/ $i = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, r$; $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet/ függvények, akkor a

$$\vartheta_z : T_z(E) \longrightarrow V_z(E) \quad (z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \text{ tetsz.})$$

lineáris leképezést a

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^A} \right)_z \right\} ; \quad A = 1, \dots, n, n+1, \dots, n+r ,$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} \right)_z \right\} ; \quad \alpha = 1, \dots, r$$

bázispárra vonatkozóan a

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c:c} \Gamma^{\alpha}_{i}(z) & \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] & r \\ \begin{array}{cc} \xleftarrow{\quad n \quad} & \xleftarrow{\quad r \quad} \end{array} & \end{array}$$

$r \times (n+r)$ -tipusu matrix reprezentálja.

Bizonyitás. A feladatunk a szóbanforgó matrixelőállitást definiáló

$$/\mathrm{x}/ \qquad \mathcal{V}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\right) = V^{\alpha}_{A}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$$
$$(A = 1, \dots, n+1, \dots, n+r)$$

összefüggésekben szereplő matrixelemek explicit meghatározása.

1/ /x/ és a $\mathcal{V}$ -re vonatkozó 2° feltétel alapján

$$\mathcal{V}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z = V^{\alpha}_{n+\beta}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z$$

irható, amiből

$$/\mathrm{xx}/ \qquad \underline{V^{\alpha}_{n+\beta}(z) = \delta^{\alpha}_{\beta}} \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, r)$$

következik.

2/ A 8. állitás következménye folytán a

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_{i}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \qquad (i = 1, \dots, n)$$

vektorok horizontálisak s ezért a $\mathcal{V}$ definiciójában szereplő 1° feltétel értelmében $\mathcal{V}_z$ a zérusvektorba viszi át őket. Igy - alkalmazva /x/-ot és /xx/-ot is - azt kapjuk, hogy

$$0 = \mathcal{V}_z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_{i}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = V^{\alpha}_{i}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z -$$
$$- \Gamma^{\alpha}_{i}(z)V^{\beta}_{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z = V^{\alpha}_{i}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z - \Gamma^{\alpha}_{i}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \, ,$$

ahonnan a $\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$ vektorok lineáris függetlensége miatt

$$V_i^\alpha(z) = \Gamma_i^\alpha(z) \quad (i = 1,\dots,n;\ \alpha = 1,\dots,r)$$

adódik. ▨

<u>Következmény.</u> Tetszőleges

$$a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \in T_z(E) \quad (z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}))$$

vektor esetén

$$\mathcal{V}_z(a) = \left(a^{n+\alpha} + a^i\,\Gamma_i^\alpha(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z . \ ▨$$

Most sort kerítünk a koordinátavektormezőknek arra az általánosítására, amelyet már az I./4. példában jeleztünk, bevezetve az un. <u>keretezést</u> /"<u>framing</u>", ld. [GHV], Vol.II. p.352./. Ez a lokális leírás igen hasznos eszközének fog bizonyulni egész tárgyalásunk során!

<u>9. definició.</u> Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, $\mathcal{U} \subset B$ egy nyilt halmaz. - Azt mondjuk, hogy az

$$e_\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow E \quad (\alpha = 1,\dots,r)$$

metszetek ξ <u>$\mathcal{U}$ fölötti keretezését</u> alkotják, ha $\forall\, x \in \mathcal{U}$: $e_1(x),\dots,e_r(x)$ bázisa F_x -nek.

<u>3. lemma</u> Minden $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyalábnak megadható a bázissokaság alkalmasan választott nyilt részhalmaza fölötti keretezése; nevezetesen: ha $y^1,\dots,y^n, y^{n+1},\dots,y^{n+r}$ a standard koordinátarendszer egy $\mathcal{U}$ trivializáló környezet projekció-inverze fölött, akkor az $y^{n+1},\dots,y^{n+r}$ függ-

vények F_x -re való - változatlanul jelölt - leszükitései $L(F_x)$ -nek egy bázisát alkotják s ha F_x ehhez duális bázisa $e_1(x),\dots,e_r(x)$, akkor az

$$e_\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow E \, , \quad x \longmapsto e_\alpha(x) \quad (\alpha = 1,\dots,r)$$

metszetek $\mathcal{U}$ fölötti keretezést szolgáltatnak ξ számára. - Ezt a keretezést <u>a standard koordinátarendszer által indukált keretezésként</u> emlitjük.

<u>Bizonyitás</u>. A standard koordinátarendszer <u>I./2.5</u>. szakaszban leirt konstrukciója, valamint a vektornyaláb definiciójában szereplő <u>VB3</u>. feltétel alapján nyilvánvaló, hogy

$$y^{n+\alpha}\big|_{F_x} \doteq y^{n+\alpha} \in L(F_x) \quad (\alpha = 1,\dots,r)$$

és hogy e függvények lineárisan függetlenek. Hasonlóan könnyen ellenőrizhető az e_α $(\alpha=1,\dots,r)$leképezések differenciálhatósága.⊘

<u>12. állitás</u> Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{K}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés. Tekintsük az $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekció-inverzén adott $y^1,\dots,y^n,$ $y^{n+1},\dots,y^{n+r}$ standard koordinátarendszer által indukált $e_1,\dots,e_r$ $\mathcal{U}$ fölötti keretezést. - Ha

$$K : \tau_E \longrightarrow \xi$$

a $\mathcal{K}$ -hoz tartozó konnexióleképezés, akkor

$$\forall z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \, , \quad a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \in T_z(E):$$

$$\underline{K_z(a) = \left(a^{n+\alpha} + a^i\,\Gamma^\alpha_i(z)\right)e_\alpha(x)} \quad (x = \pi(z)).$$

<u>**Bizonyitás.**</u> A 11. állítás következménye folytán

$$K_z(a) \doteq \alpha_z\left[\vartheta_z(a)\right] = \alpha_z\left[\left(a^{n+\alpha} + a^i\,\Gamma_i^{n+\alpha}(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] ,$$

igy csupán azt kell belátnunk, hogy

$$\alpha_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = e_\alpha(x) \qquad (x = \pi(z),\ \alpha = 1,\dots,r).$$

- A 3. állítás értelmében

$$\alpha_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = j_z^{-1}\left[(dj_x)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = j_z^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z ,$$

ahol

$$j_z : F_{\pi(z)} \xrightarrow{\cong} T_z\left(F_{\pi(z)}\right).$$

Mivel a 2. lemma és az indukált keretezés konstrukciója alapján

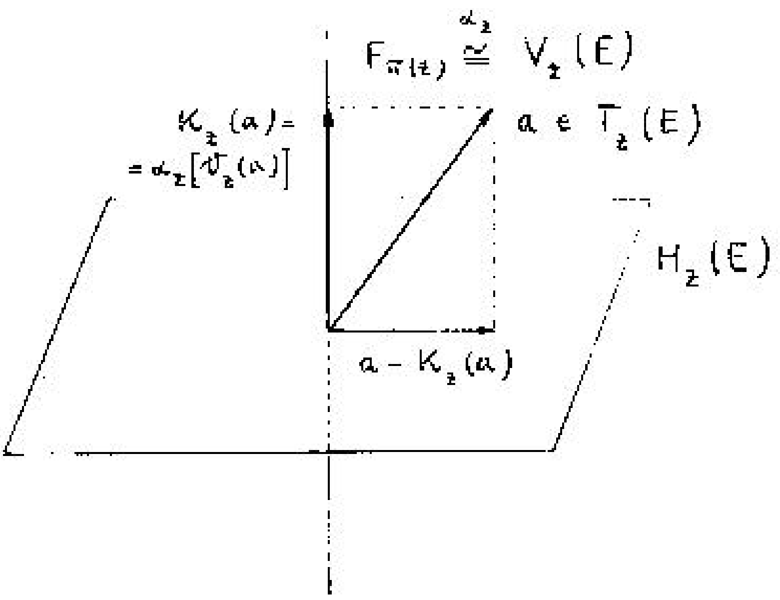
$$j_z\left(e_\alpha(x)\right) = y^{n+\beta}\left(e_\alpha(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z = \delta_\alpha^\beta\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z ;$$

következik, hogy

$$j_z^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = e_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1,\dots,r).$$

<u>Geometriai interpretáció</u>

$K_z(a)$ mintegy azt "méri", hogy az $a \in T_z(E)$ vektor "mennyire tér el" a horizontális összetevőjétől:



13. állitás Ha a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezéshez tartozó horizontális lift ill. konnexióleképezés ℓ^h ill. K és ℓ^v a vertikális lift, akkor fennállnak a következő összefüggések:

a/ $\underline{K \circ \ell^h = o}$,
$$\begin{tikzcd} \tau_E \arrow[r, "K"] & \xi \\ \pi^*(\tau_B) \arrow[u, "\ell^h"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$
;

b/ $\underline{K \circ \ell^v = \iota_\xi}$
$$\begin{tikzcd} \tau_E \arrow[r, "K"] & \xi \\ \xi \arrow[u, "\ell^v"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$
.

Bizonyitás.

a/ $K \circ \ell^h = \alpha \circ \mathcal{V} \circ \ell^h = 0$, hiszen $\operatorname{Im} \ell^h = \operatorname{Im} \mathcal{H} = \operatorname{Ker} \mathcal{V}$.

b/ Lokálisan, a standard koordinátarendszer alapulvétele mellett okoskodunk. - Legyen $z \in F_x$ tetszőleges. A 4. és 12. állitás valamint az indukált keretezés konstrukciója alapján

$$K_z\left[\ell^v(z)\right] = K_z\left[y^{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = y^{n+\alpha}(z)\, e_\alpha(\pi(z)) =$$
$$= z . \text{⊘}$$

4. Horizontális leképezés által indukált endomorfizmusok

Néhány általános jellegü megállapitással kezdjük.

10. definició

a/ Egy vektornyaláb önmagába való nyalábleképezéseit <u>vektornyaláb-endomorfizmusoknak</u> - a továbbiakban röviden <u>endo-</u>

morfizmusoknak - nevezzük.

b/ Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb s tekintsük a totáltér érintőnyalábjának

$$f : \tau_E \longrightarrow \tau_E$$

endomorfizmusát. - Azt mondjuk, hogy

1. f projektor, ha $f^2 = f$;
2. involució vagy majdnem-szorzat struktura τ_E -n, ha $f^2 = \iota_{\tau_E}$;
3. majdnem-érintő struktura τ_E -n, ha $f^2 = \sigma$;
4. majdnem-komplex struktura τ_E -n, ha $f^2 = -\iota_{\tau_E}$;
5. $\mathfrak{F}$ -struktura τ_E -n, ha $f^3 + f = \sigma$.

Megjegyzések.

1/ Pusztán fogalmi szempontból természetesen fölösleges a definició b/ részében az a megkötés, hogy az alapulvett sokaság egy vektornyaláb totáltere, nálunk azonban kizárólag ez a szituáció fog előfordulni - ezért fogalmaztunk igy.

2/ Az 1.-5. strukturák egymással benső kapcsolatban állhatnak. Ezt egyelőre két triviális példával illusztráljuk:

1. példa. A majdnem-komplex strukturák egyuttal $\mathfrak{F}$ -strukturák is. - Valóban, $f^2 = -\iota \Rightarrow f^3 + f = -f + f = \sigma$.

2. példa. Tegyük föl, hogy P majdnem-szorzat struktura, J pedig majdnem-komplex struktura τ_E -n s hogy ezek a

$$P \circ J + J \circ P = 0$$

kapcsolatban állnak egymással. - Ekkor

$$T_1 \doteq P + J \quad \text{és} \quad T_2 \doteq P - J$$

egyaránt majdnem-szorzat struktura τ_E -n, hiszen

$$T_1^2 = (P+J)\cdot(P+J) = P^2 + J\cdot P + P\cdot J + J^2 = \iota + \sigma - \iota = \sigma\,,$$

$$T_2^2 = (P-J)\cdot(P-J) = P^2 - J\cdot P - P\cdot J + J^2 = \iota - \sigma - \iota = \sigma\,.$$

A 2. példa IANUS-UDRISTE /1970/ 4.4. általánosabb - de ezáltal igazán érdekes speciális tartalmától is megfosztott - megfogalmazása.

3/ A 2.-5. strukturáknak rendkivül gazdag irodalma van, de elsősorban - és nem véletlenül - az érintőnyaláb differenciálgeometriájának vonatkozásában.

ad 2. Érintőnyalábon adott majdnem-szorzat strukturával lényegében már SCHOUTEN klasszikusnak számitó "Ricci-kalkulusában" is találkozunk. Az 50-es évek elején D.SPENCER a "Notes mimeographed at Princeton University" sorozatban irt e strukturákról egy összefoglalást /a terminus technicus is tőle származik/, majd A.G.WALKER végzett fontos vizsgálatokat ezen a területen /ld. pl. WALKER /1958//. Napjainkban többek között román és olasz kutatók dolgoznak intenziven ebben a témában, kapcsolatba hozva a majdnem-szorzat strukturákat a Vranceanu-konnexiókkal. - A legujabb fejleményeket illetően ld. CADDEO /1979/, IANUS-POPOVICI /1980/.

Minket a majdnem-szorzat strukturák a horizontális leképezéssel kapcsolatban érdekelnek, s rövidesen kiderül, hogy valóban komoly érdeklődésre tarthatnak számot ebből a szempontból is.

ad 3. A majdnem-érintő struktura fogalmát R.S.CLARK és M.R.BRUCKHEIMER vezette be /CLARK-BRUCKHEIMER /1960//. E struktura-tipusnak igen szép és elegáns konnexióelméleti alkalmazását adja GRIFONE /1972/; ezt a 16. állitást követő megjegyzésben fogjuk vázolni. - ANASTASIEI /1980/ a $\xi = (E, \pi, B, F)$ Banach-vektornyalábból kiindulva elkészitett $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \to 0$ vektornyaláb-sorozatot tekintve, a $T = i \circ \widetilde{d\pi}$ előirással kiván majdnem-szorzat strukturát értelmezni, ez a definició azonban meglehetősen problematikusnak látszik.

ad 4. és 5. Majdnem-komplex strukturáról a Függelékben fogunk kicsit részletesebben szólni. Az $\mathcal{F}$ -struktura fogalmát Kentaro YANO vezette be /ld. YANO /1961// és elsősorban japán szerzők tették igen alapos vizsgálat tárgyává. /Különösen sok dolgozat jelent meg e tárgyból a Kodai Math. Sem. Reports c. folyóirat 1966. évi, 18. kötetében./ Az $\mathcal{F}$ -strukturákra szintén csak a Függelékben s ott is csupán egy megjegyzés erejéig térünk vissza.

A majdnem-szorzat struktura kivételével a 2.-5. strukturák existenciája a definiciónknak megfelelő - azaz az érintőnyaláb differenciálgeometriájánál általánosabb - szituációban csak további, erős megszoritásokkal biztositható /igy voltaképpen az 1. és 2. példa is "levegőben lóg"/ - s ez az oka annak, hogy vizsgálataink a jelzett körben mozogtak.

14. állitás Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, f pedig endomorfizmusa τ_E -nek. Ekkor f egyaránt interpretálható E -n adott τ_E -értékü 1 -formaként és E fölötti $(1,1)$ -tipusu tenzormezőként, azaz

$$f \in A^1(E; \tau_E) \quad \text{és} \quad f \in \mathcal{H}^1_1(E)$$

is irható.

Bizonyitás.

a/ Egy $f: \tau_E \longrightarrow \tau_E$ nyalábleképezés az I./5.e/ definició szerint olyan $f: TE \longrightarrow TE$ /differenciálható/ fibrumtartó leképezést jelent, amelynek a fibrumokra való $f_{T_z}: T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$ leszükitései lineáris leképezések, igy f a

$$z \in E \longmapsto f_z, \; f_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$$

előirás szerint τ_E -értékü 1 -formaként fogható föl.

b/ Az I./3.3. szakaszban mondottak értelmében fennálló

$$A^1(E; \tau_E) \cong A^1_E(\mathcal{H}(E), \mathrm{Sec}\,\tau_E) \equiv A^1_E(\mathcal{H}(E), \mathcal{H}(E))$$

modulus-izomorfizmus alapján f azonosítható az

$$\tilde{f}: \mathcal{H}(E) \longrightarrow \mathcal{H}(E), \quad [\tilde{f}(Z)](z) \doteq f_z[Z(z)] \quad (Z \in \mathcal{H}(E), z \in E)$$

$C^\infty(E)$ -lineáris leképezéssel, s ezért az I./14. állitásra való hivatkozással E fölötti $(1,1)$ -tenzormezőnek tekinthető. ▨

Megjegyzés. Az $f \in \mathcal{H}^1_1(E)$ interpretációhoz másképpen is eljuthatunk. - Az a/-ban tett észrevétel szerint

$$f: z \in E \longmapsto f_z \in L[T_z(E), T_z(E)],$$

itt azonban ismeretesen $L[T_z(E), T_z(E)] \cong L[T_z(E)] \otimes T_z(E)$ /ld. pl. [Greub2] , 1.28./, s mivel $L[T_z(E)] \otimes T_z(E)$ a $\tau_E^* \otimes \tau_E$ nyaláb z fölötti fibruma, következik hogy

$$f \in \mathrm{Sec}(\tau_E^* \otimes \tau_E) \doteq \mathcal{H}^1_1(E).$$

--- . ---

Az a körülmény, hogy τ_E endomorfizmusai E $(1,1)$ -tenzormezőiként is interpretálhatók, lehetővé teszi a következő fontos értelmezést:

<u>11. definíció</u>. Az $f:\tau_E \longrightarrow \tau_E$ és $g:\tau_E \longrightarrow \tau_E$ endomorfizmus <u>Nijenhuis-torzióján</u> azt az $\underline{[f,g] \in \mathcal{H}^2_1(E)}$ $(1,2)$-tenzormezőt értjük, amelyet az

$$[f,g] : \mathcal{X}(E) \times \mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}(E), \ (\mathcal{U},V) \longmapsto [f,g](\mathcal{U},V),$$

$$[f,g](\mathcal{U},V) \doteq [f\mathcal{U},gV] + [g\mathcal{U},fV] - g[f\mathcal{U},V] - f[g\mathcal{U},V] -$$
$$- g[\mathcal{U},fV] - f[\mathcal{U},gV] + g\circ f[\mathcal{U},V] + f\circ g[\mathcal{U},V]$$

előirás ad meg /ahol a jobboldalon <u>vektormezők</u> Lie-szorzatai állnak/.

<u>Megjegyzés</u> Ha $f=g$, akkor speciálisan

$$\frac{1}{2}[f,f](\mathcal{U},V) = [f\mathcal{U},fV] + f\circ f[\mathcal{U},V] - f[f\mathcal{U},V] - f[\mathcal{U},fV]$$

adódik, számunkra ez az eset lesz érdekes. - Az $[f,g]$ operációt illetően ld. FRÖLICHER-NIJENHUIS /1956/, elsősorban §6.

—— . ——

<u>15. állitás</u> Legyen adva a $0 \longrightarrow V_E \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\xrightarrow{\widetilde{d\pi}}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés.

a/ A $\underline{h \doteq \mathcal{H}\circ\widetilde{d\pi}}$ és a $\underline{v \doteq \iota_{\tau_E} - h}$ leképezés projektor τ_E-n ; előbbit a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó <u>horizontális projekciónak</u>, utóbbit a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó <u>vertikális projekciónak</u> nevezzük.

b/ Alapulvéve az $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekció-inverzén az $y^1,\dots,y^n,y^{n+1},\dots,y^{n+r}$ szokásos koordinátarendszert, tetszőleges $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ esetén

$$h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma_i^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r);$$

következésképpen h_z matrixa $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan az

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & r \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ r \end{array} & \left[\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \boxed{-\Gamma_i^\alpha(z)} & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$(n+r) \times (n+r)$ -tipusu matrix, mig

$$v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \Gamma_i^\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \quad (\alpha = 1, \dots, r)$$

tehát v_z matrixa $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & r \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ r \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \boxed{\Gamma_i^\alpha(z)} & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \end{array}$$

matrix.

c/ Fennállnak a következő összefüggések:

/1/ $h \circ v = v \circ h = 0$;

/2/ $K \circ h = 0$, $K \circ v = K$ / K a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó konnexióleképezés/.

Bizonyitás.

a/ $\underline{h^2} = h \circ h \doteq (\mathcal{H} \circ \widetilde{d\pi}) \circ (\mathcal{H} \circ \widetilde{d\pi}) = \mathcal{H} \circ (\widetilde{d\pi} \circ \mathcal{H}) \circ \widetilde{d\pi} =$

$= \mathcal{H} \circ \iota_{\pi^*(\tau_B)} \circ \widetilde{d\pi} = \mathcal{H} \circ \widetilde{d\pi} = \underline{h}$;

$\underline{v^2} = (\iota_{\tau_E} - h) \circ (\iota_{\tau_E} - h) = \iota_{\tau_E} - 2h + h = \iota_{\tau_E} - h \doteq \underline{v}$,

tehát h és v projekció τ_E -n.

b/ Az I./1. példában mondottak valamint a 8. állitás alkalmazásával rendre

$$h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \mathcal{H}_{\pi(z)}\left[(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right] = \mathcal{H}_{\pi(z)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(z)} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma_i^{\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \qquad (i = 1,\dots,n) \ ;$$

$$h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \mathcal{H}_{\pi(z)}\left[(d\pi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] =$$

$$= \mathcal{H}_{\pi(z)}(\sigma) = \sigma \qquad (\alpha = 1,\dots,r) \ ;$$

$$v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = (\iota - h_z)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z +$$

$$+ \Gamma_i^{\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \Gamma_i^{\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \qquad (i = 1,\dots,r) \ ;$$

$$v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = (\iota - h_z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \qquad (\alpha = 1,\dots,r)$$

adódik, ami állitásunk b/ részét igazolja.

c/ $h \circ v = v \circ h = (\iota_{\tau_E} - h) \circ h = h - h^2 = h - h = \sigma$,

$K \circ h = \alpha \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{H} \circ \widetilde{d\pi} = \alpha \circ \sigma \circ \widetilde{d\pi} = \sigma$,

$K \circ v = \alpha \circ \mathcal{V} \circ (\iota_{\tau_E} - h) = \alpha \circ \mathcal{V} - K \circ h = \alpha \circ \mathcal{V} - \sigma = K$. ▨

Következmény. Tetszőleges $z \in E$ esetén a h_z ill. v_z lineáris transzformációnak a $T_z(E)$ érintőtér adaptált bázisára vonatkozó matrixa az

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & \quad r \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \\ r \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{ill. a} \quad \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

<u>diagonálmatrix</u>.

<u>Bizonyitás</u>. $T_z(E)$ adaptált bázisát a 9. állitást követő megjegyzés értelmében a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^\beta_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \quad (i=1,\dots,n\,;\ \alpha=1,\dots,r)$$

vektorok alkotják. E bázisvektorok iménti állitásunk b/ része alapján a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z = h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\,, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$$

alakban irhatók, világos tehát - c//1/-et is figyelembe véve-, hogy

$$h_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z\,; \quad h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = 0\,,$$

mig

$$v_z\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z = 0\,, \quad v_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z. \quad \blacksquare$$

——— . ———

Soronkövetkező állitásunk kimondása előtt emlékeztetünk arra, hogy ha φ lineáris transzformációja a V vektortérnek és λ sajátértéke φ-nek, akkor φ λ-hoz tartozó <u>sajátalterén</u> az <u>összes</u> olyan $x \neq 0 \in V$ vektor által alkotott alteret értjük, amelyre $\varphi(x) = \lambda x$ teljesül.

16. állítás

a/ Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{\ i\ } \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés!

1/ Amennyiben h a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó horizontális projekció, ugy

$$P \doteq 2h - \iota_{\tau_E}$$

<u>majdnem-szorzat struktura</u> τ_E -n; ezt a majdnem-szorzat strukturát <u>$\mathcal{H}$ által indukáltnak</u> mondjuk.

2/ P fibrumokra való

$$P_z \in L\left[T_z(E), T_z(E)\right] \quad (z \in E)$$

leszükitéseinek a -1 sajátértékhez tartozó sajátalterei a vertikális alterek.

3/ Egy $T_z(E)$ -beli vektor pontosan akkor horizontális, ha P_z fixen hagyja.

4/ $P_z \in L\left[T_z(E), T_z(E)\right]$ -t $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan az

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{-2\Gamma^{\alpha}_{i}(z)}}^{n} & \overbrace{}^{r} \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \\ r \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & 0 \\ & \boxed{-2\Gamma^{\alpha}_{i}(z)} & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

matrix reprezentálja.

b/ Ha P olyan majdnem-szorzat struktura τ_E -n, hogy a fibrumokra való leszükitéseiként adódó $P_z : T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$ lineáris transzformációknak a -1 sajátértékhez tartozó sajátalterei a vertikális alterek, akkor P -t egy egyértelmüen meghatározott horizontális leképezés indukálja.

Bizonyitás.

a/ Föltesszük, hogy adva van a $\mathcal{H}$ horizontális leképezés és vizsgáljuk a $\mathcal{P} \doteq 2h - \iota_{\tau_E}$ endomorfizmust.

1/ $\mathcal{P}$ majdnem-szorzat struktura. - A 15.a/ állitás szerint $h^2 = h$; ennek fölhasználásával

$$\mathcal{P}^2 = (2h - \iota_{\tau_E})\cdot(2h - \iota_{\tau_E}) = 4h^2 - 4h + \iota_{\tau_E} = \iota_{\tau_E}.$$

2/ $\forall a \in V_z(E) : \mathcal{P}_z(a) = -a$ A 2.a/ és a 15.b/ állitás alapján tetszőleges $a \in V_z(E)$ vektor

$$a = a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = v_z(a)$$

alakban irható, igy a 15.c/ állitás //1/ formula figyelembevételével

$$\mathcal{P}_z(a) = 2h_z[v_z(a)] - a = -a.$$

$\mathcal{P}_z(a) = -a \Longrightarrow a \in V_z(E)$

$\mathcal{P}_z(a) = 2h_z(a) - a = -a \Longrightarrow h_z(a) = 0.$ Azonban a 15.b/ és a 9. állitás szerint

$$h_z(a) = h_z\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] =$$

$$= a^i\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z ,$$

s igy $h_z(a) = 0 \Longrightarrow a^1 = \ldots = a^n = 0 \Longrightarrow a \in V_z(E)$, hiszen a $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h_z$ vektorok - mint az adaptált bázis vektorai - lineárisan függetlenek.

3/ Mivel $a \in H_z(E)$ esetén $a = a^i h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z$ irható; illetőleg ha $\mathcal{P}_z(a) = 2h_z(a) - a = a$, akkor $h_z(a) = a$, következik, hogy $a \in H_z(E) \Longleftrightarrow \mathcal{P}_z(a) = a$.

4/ Ismét a 15.b/ állitásra hivatkozva kapjuk, hogy

$$\mathcal{P}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = 2h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - 2\Gamma^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

ill.

$$\mathcal{P}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = 2h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z - \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = -\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$$

$$(\alpha = 1,\dots,r)\ ;$$

igy $\mathcal{P}_z$ matrixa $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan a mondott alaku.

b/ Föltesszük, hogy olyan

$$\mathcal{P} : \tau_E \longrightarrow \tau_E\ ,\quad z \in E \longmapsto \mathcal{P}_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$$

majdnem-szorzat struktura van adva, amelyre teljesül:

$$\forall z \in E :\quad \mathcal{P}_z(a) = -a \iff a \in V_z(E).$$

- Tekintsük ebben az esetben a τ_E érintõnyaláb

$\tilde{h} \doteq \frac{1}{2}(\mathcal{P} + \iota_{\tau_E})$ elõirással definiált endomorfizmusát!

A következõ megállapitásokat tehetjük:

$\tilde{h} : \tau_E \longrightarrow \tau_E$ projektor, mivel

$$\tilde{h}^2 = \frac{1}{4}(\mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}\circ\iota_{\tau_E} + \iota^2_{\tau_E}) = \frac{1}{4}(2\mathcal{P} + 2\iota_{\tau_E}) = \frac{1}{2}(\mathcal{P} + \iota_{\tau_E}) \doteq \tilde{h}.$$

$\forall z \in E :\ \operatorname{Ker}\tilde{h}_z = V_z(E)$. - Valóban,

$$a \in V_z(E) \Rightarrow \tilde{h}_z(a) = \frac{1}{2}[\mathcal{P}_z(a) + a] = \frac{1}{2}(-a + a) = o \Longrightarrow$$

$$V_z(E) \subset \operatorname{Ker}\tilde{h}_z\ ,$$

mig ha $a \in \operatorname{Ker}\tilde{h}_z$, ugy $\tilde{h}_z(a) = \frac{1}{2}\mathcal{P}_z(a) + \frac{1}{2}a = o$ folytán $\mathcal{P}_z(a) = -a$ adódik, amibõl föltevésünk alapján $a \in V_z(E)$ következik, tehát a $\operatorname{Ker}\tilde{h}_z \subset V_z(E)$ forditott irányu tartalmazás is fennáll. - Ilymódon /figyelembe véve, hogy projekció-operátor esetén a leképezett vektortér direkt összege a képtérnek és a nulltérnek/

$$\forall z \in E :\ T_z(E) = \operatorname{Ker}\tilde{h}_z \oplus \operatorname{Im}\tilde{h}_z = V_z(E) \oplus \operatorname{Im}\tilde{h}_z\ ,$$

ami azt implikálja, hogy az érintõnyaláb elõáll

$\tau_E = V_E \oplus \operatorname{Im}\tilde{h}$ Whitney-összegként és igy - a 6. definiciónak megfelelően – $\operatorname{Im}\tilde{h}$ horizontális résznyalábja τ_E -nek. Ekkor azonban a 7. c/ állítás értelmében egyértelmüen létezik olyan $\mathcal{H}$ horizontális leképezés, hogy $\underline{\operatorname{Im}\tilde{h} = \operatorname{Im}\mathcal{H}}$. Az ehhez tartozó horizontális projekció nyilvánvalóan a $\tilde{h}$ projektor, amiből az is világos, hogy $\mathcal{H}$ az előre megadott P majdnem-szorzat strukturát indukálja.⊘

<u>Következmény</u> Ha $P: \tau_E \to \tau_E ,\; z \in E \longmapsto P_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$ horizontális leképezés által indukált majdnem-szorzat struktura, akkor tetszőleges $z \in E$ esetén a P_z lineáris transzformációt $T_z(E)$ <u>adaptált bázisára</u> vonatkozóan az

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\longleftarrow n \longrightarrow & \longleftarrow r \longrightarrow\end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ \\ \\ r \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

diagonálmatrix reprezentálja.

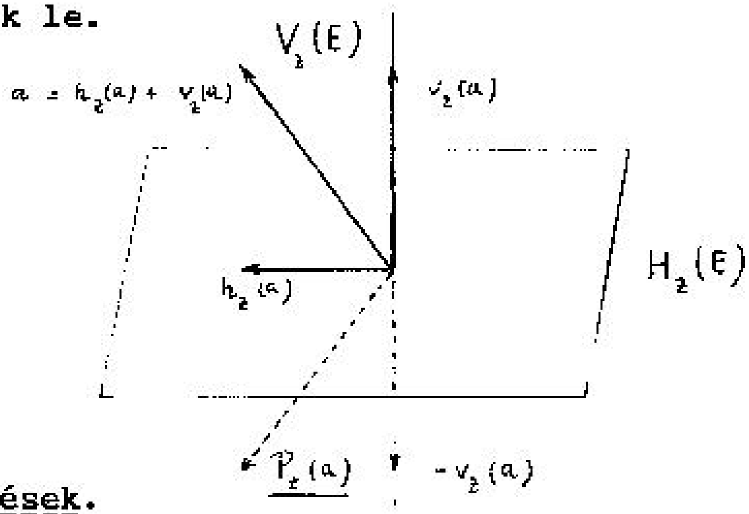
<u>Bizonyitás</u>. Az adaptált bázis első n számu vektora horizontális, igy ezeket 3/ szerint P_z fixen hagyja; második r számu vektora vertikális, hozzájuk tehát – 2/ értelmében – P_z az ellentettjüket rendeli.⊘

E korollárium alapján kézenfekvő a következő

<u>Geometriai interpretáció</u> Horizontális leképezés által indukált

$$P: \tau_E \longrightarrow \tau_E ,\quad z \in E \longmapsto P_z \in L\,[T_z(E), T_z(E)]$$

majdnem-szorzat struktura esetén a P_z lineáris transzformációk a $H_z(E)$ "horizontális sikok"-ra vonatkozó <u>tükrözése</u>ket irnak le.



<u>Megjegyzések</u>.

1/ Állitásunk b/ része lehetővé teszi az itt tárgyalt elmélet egy alternativ - de ugyancsak <u>érzékletes</u> geometriai tartalmat hordozó - fölépitését, horizontális leképezés helyett olyan

$$\mathcal{P} : \tau_E \longrightarrow \tau_E \mid z \in E \longmapsto \mathcal{P}_z \in L[T_z(E); T_z(E)]$$

endomorfizmusból indulva ki, amelyre teljesül:

1^o $\mathcal{P}$ majdnem-szorzat struktura;

2^o $\forall z \in E : \mathcal{P}_z(a) = -a \iff a \in V_z(E)$.

Most vázoljuk, hogy ebben az esetben - egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet alapulvétele után - miként származtathatók le a $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölötti <u>konnexióparaméterek</u>. - Legyen $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ tetszőleges, s tegyük föl, hogy $\mathcal{P}_z$ matrixa $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan a $\left(\mathcal{P}^A_B(z)\right)$ $(n+r)\times(n+r)$ -es matrix, azaz hogy

$$\mathcal{P}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^B}\right)_z = \mathcal{P}^A_B(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^A}\right)_z \quad (B = 1,\dots,n,n+1,\dots,n+r).$$

<u>1^o miatt</u> ekkor

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \mathcal{P}_z\left[\mathcal{P}_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right] = \left[\mathcal{P}^j_i(z)\mathcal{P}^k_j(z) + \mathcal{P}^{n+\alpha}_i(z)\mathcal{P}^k_{n+\alpha}(z)\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_z +$$

$$+\left[\mathcal{P}^j_i(z)\mathcal{P}^{n+\beta}_j(z) + \mathcal{P}^{n+\alpha}_i(z)\mathcal{P}^{n+\beta}_{n+\alpha}(z)\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z \qquad (i = 1,\dots,n)$$

adódik, ahonnan

$$/*/\quad \begin{cases} \left(P^j_i P^k_j + P^{n+\alpha}_i P^k_{n+\alpha}\right)(z) = \delta^k_i & (i,k=1,\dots,n) \\ \left(P^j_i P^{n+\beta}_j + P^{n+\alpha}_i P^{n+\beta}_{n+\alpha}\right)(z) = 0 & (i=1,\dots,n;\ \beta=1,\dots,r) \end{cases}$$

következik.

<u>2^o folytán</u>

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = -P_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = -P^i_{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - P^{n+\beta}_{n+\alpha}(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z \quad (\alpha=1,\dots,r),$$

igy

$$/**/\quad \underline{P^i_{n+\alpha}(z) = 0}, \quad \underline{P^{n+\beta}_{n+\alpha}(z) = -\delta^\beta_\alpha} \quad (i=1,\dots,n;\ \alpha,\beta=1,\dots,r).$$

/**/ figyelembevételével /*/-ből a

$$\begin{cases} P^j_i(z)\,P^k_j(z) = \delta^k_i \\ P^j_i(z)\,P^{n+\beta}_j(z) - P^{n+\beta}_i = 0 \end{cases}$$

összefüggésekhez jutunk, amelyekből azt kapjuk, hogy

$$\forall\, z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}):\ \underline{P^j_i(z) = \delta^j_i} \quad (i,j=1,\dots,n).$$

Ilymódon $P_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$ matrixa $T_z(E)$ standard bázisára vonatkozóan

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad n \quad & \quad r \quad \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \mathbf{0} \\ \boxed{P^{n+\alpha}_i} & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n \\ \\ r \end{array} \end{array}$$

alaku, ugyhogy most - célszerüen - a

$$\Gamma^\alpha_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \Gamma^\alpha_i(z) := -\frac{1}{2} P^{n+\alpha}_i(z)$$

$$(i=1,\dots,n,\ \alpha=1,\dots,r)$$

függvényekként vezetendők be a konnexióparaméterek. Mivel az állitásban mondottak értelmében

$H_z(E) = \{a \in T_z(E) \mid P_z(a) = a\}$, egyszerüen adódik, hogy a horizontális vektorok a standard koordinátarendszerben éppen az $a^i\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma^{n+\alpha}_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]$ alaku vektorok, megegyezésben a 8. állitás következményével.

2/ Mint már korábban jeleztük, e helyen szólunk a konnexióelmélet $\xi = \tau_6$ esetre vonatkozó, GRIFONE-féle fölépitéséről. - Felhasználva azt a KLEIN-VOUTIER /1968/-ból származó észrevételt, miszerint τ_6 -n megadható egy $T: \tau_6 \to \tau_6$ kanonikus majdnem-érintő struktura, a szerző olyan P majdnem-szorzat strukturából indul ki, amely eleget tesz a $T \circ P = T$, $P \circ T = -T$ feltételeknek és - egyebek mellett - megmutatja róla, hogy ekkor teljesül rá az iménti 2° tulajdonság is. E ponttól a tárgyalás folytatódhat az állitás b/ részében, ill. - lokálisan - az 1/-ben jelzett módon.

3/ Megemlitjük, hogy - ugyancsak a $\xi = \tau_6$ speciális esetben és ráadásul lineáris konnexióból kiindulva - IANUS /1973/ is leszármaztatja az általunk $\mathcal{H}$ által indukáltnak nevezett majdnem-szorzat strukturát, mégpedig "la prima struttura prodotto dello spazio fibrato tangente" cimszó alatt.

4/ Rámutatunk végül, hogy a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó K konnexióleképezés és a $\mathcal{H}$ által indukált P majdnem-szorzat struktura kapcsolatát illetően fennáll a $K \circ P = -K$ összefüggés; ez a 15. állitás /c//2/ alapján azonnal látható.

5. Görbület és integrálhatóság

12. definició. Horizontális leképezés <u>görbületi tenzormező</u>-jén a hozzátartozó horizontális projekció Nijenhuis-torziójának $-\frac{1}{2}$ -szeresét értjük.

Jelölés: $\mathcal{R} \doteq -\frac{1}{2}[h,h]$.

Megjegyzés. Értelmezésünk GRIFONE /1972/, Def. I.57. közvetlen általánositása.

17. állitás. Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\xrightarrow{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés s tekintsük egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet alapulvétele után $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ szokásos koordinátarendszert. - Ha

$$Z = Z^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Z^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} \quad \text{és} \quad V = V^i \frac{\partial}{\partial y^i} + V^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$$

$\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölötti vektormezők, akkor

$$\mathcal{R}(Z,V) = Z^i V^j \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_i}{\partial y^j} + \Gamma^\beta_j \frac{\partial \Gamma^\alpha_i}{\partial y^{n+\beta}} - \Gamma^\beta_i \frac{\partial \Gamma^\alpha_j}{\partial y^{n+\beta}} \right) \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}.$$

Bizonyitás. Nijenhuis-torzió értelmezését /11. definició/ követő megjegyzés szerint és $h^2 = h$ figyelembevételével

$$-\frac{1}{2}[h,h](Z,V) = h[hZ,V] + h[Z,hV] - [hZ,hV] - h[Z,V]$$

irható. Az I./7. állitás alkalmazásával s fölhasználva azt is, hogy a 15.b/ állitásból adódóan $h\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right) = 0$ $(\alpha = 1, \dots, r)$, rendre kiszámitjuk a jobboldali Lie-szorzatokat.

1. $$h[Z,V] = h\left[Z^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Z^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, V^j \frac{\partial}{\partial y^j} + V^{n+\beta} \frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} \right] =$$

$$= h\left\{ \left[Z^i \frac{\partial}{\partial y^i}, V^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right] + \left[Z^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, V^j \frac{\partial}{\partial y^j} \right] \right\} +$$

$$+h\left\{\left[Z^i\frac{\partial}{\partial y^i}, V^{n+\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right]+\left[Z^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, V^{n+\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right]\right\} =$$

$$=\left(Z^j\frac{\partial V^i}{\partial y^j}-V^j\frac{\partial Z^i}{\partial y^j}\right)h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)+\left(Z^{n+\alpha}\frac{\partial V^i}{\partial y^{n+\alpha}}-V^{n+\alpha}\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}\right)h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

2. Mivel - ugyancsak a 15.b/ állításra tekintettel -

$$hZ = Z^i h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = Z^i\frac{\partial}{\partial y^i} - Z^i\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}},$$

$$\underline{h[hZ, V]} = h\left[Z^i\frac{\partial}{\partial y^i} - Z^i\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, V^j\frac{\partial}{\partial y^j}+V^{n+\beta}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] =$$
$$= \left(Z^j\frac{\partial V^i}{\partial y^j}-V^j\frac{\partial Z^i}{\partial y^j}\right)h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) - Z^i\Gamma^\alpha_i\frac{\partial V^j}{\partial y^{n+\alpha}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) -$$
$$- V^{n+\beta}\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\beta}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right);$$

ugyanigy

$$\underline{h[Z, hV]} = \left(Z^j\frac{\partial V^i}{\partial y^j}-V^j\frac{\partial Z^i}{\partial y^j}\right)h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)+$$
$$+\left(Z^{n+\alpha}\frac{\partial V^i}{\partial y^{n+\alpha}}+V^j\Gamma^\alpha_j\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}\right)h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

3. Bevezetve az

$$R^\alpha_{ij} \doteq \frac{\partial\Gamma^\alpha_j}{\partial y^i} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_i}{\partial y^j} + \Gamma^\beta_j\frac{\partial\Gamma^\alpha_i}{\partial y^{n+\beta}} - \Gamma^\beta_i\frac{\partial\Gamma^\alpha_j}{\partial y^{n+\beta}}$$

röviditést,

$$[hZ, hV] = -Z^iV^jR^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} + \left(Z^j\frac{\partial V^i}{\partial y^j}-V^j\frac{\partial Z^i}{\partial y^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^i} -$$
$$-\Gamma^\alpha_j\left(Z^i\frac{\partial V^j}{\partial y^i}-V^i\frac{\partial Z^j}{\partial y^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} + V^j\Gamma^\alpha_j\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) -$$
$$- Z^i\Gamma^\alpha_i\frac{\partial V^j}{\partial y^{n+\alpha}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$$

adódik.

Összevetve e számitások eredményeit, néhány további, egyszerü átrendezés végrehajtása után az állitott

$$R(Z, V) = Z^iV^jR^\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$$

összefüggés áll elő. ▨

<u>Következmény</u>. $\forall Z, V \in \mathcal{H}(E)$ esetén $R(Z, V)$ <u>vertikális</u> vektormező, azaz $\underline{R(Z, V)\in\mathcal{H}_V(E)}$.

<u>Bizonyitás</u>. Ez a 2.b/ állitás figyelembevételével közvetlenül adódik. ▨

Megjegyzés. A 17. állítás bizonyitása során bevezetett

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{ij} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i,j = 1,\dots,n;\ \alpha = 1,\dots,r)$$

függvényeket az $\mathcal{R}$ görbületi tenzormező standard koordinátarendszere vonatkozó komponensfüggvényeiként fogjuk emliteni.

18. állitás $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(B)$:

$$\mathcal{R}(X^h, Y^h) = h[X^h, Y^h] - [X^h, Y^h].$$

Bizonyitás. Világos, hogy $hX^h = X^h,\ hY^h = Y^h$. Igy

$$\mathcal{R}(X^h, Y^h) \doteq -\frac{1}{2}[h,h](X^h, Y^h) \doteq$$

$$\doteq h[hX^h, Y^h] + h[X^h, hY^h] - [hX^h, hY^h] - h[X^h, Y^h] =$$

$$= h[X^h, Y^h] + h[X^h, Y^h] - [X^h, Y^h] - h[X^h, Y^h] =$$

$$= h[X^h, Y^h] - [X^h, Y^h]. \ \blacksquare$$

Geometriai interpretáció - Az $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(E) \times \mathfrak{X}(E) \longrightarrow \mathfrak{X}(E)$ görbületi tenzormező mintegy azt "méri", hogy a bázissokaságon adott vektormezők horizontális liftjeinek Lie-szorzata "mennyire tér el" a horizontálistól.

Megjegyzés. A 18. állitásban megfogalmazottól némileg eltérő tartalmu eredmény az érintőnyaláb differenciálgeometriájából /lineáris esetben/ jól ismert: ld. [YaI], Ch.II.Prop.13.

19. állitás Legyen a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{\ i\ } \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés görbületi tenzormezője $\mathcal{R}$, a hozzátartozó konnexióleképezés $\mathcal{K}$, s tekintsük az

$\alpha : V_\xi \to V_\xi$ kanonikus leképezést. Akkor

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(B)\quad \underline{\alpha \circ R(X^h, Y^h) = -K \circ [X^h, Y^h]}\ ;$$

diagramon:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
E \arrow[r, "R(X^h,Y^h)"] \arrow[d, "{[X^h,Y^h]}"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha\circ R(X^h,Y^h)", "-K\circ[X^h,Y^h]"'] & VE \arrow[d, "\alpha"] \\
TE \arrow[r, "-K"'] & E
\end{tikzcd}$$

<u>Bizonyitás</u>. Mivel $K \circ h = 0$ /15. állitás, c/ /2//, a megelőző állitásból $K \circ R(X^h, Y^h) = -K \circ [X^h, Y^h]$ adódik, s igy csupán azt kell belátnunk, hogy $K \circ R(X^h, Y^h) = \alpha \circ R(X^h, Y^h)$.

- A 17. állitás következménye szerint $R(X^h, Y^h) \in \mathfrak{X}_V(E)$, amiből világos, hogy

$$i \circ R(X^h, Y^h) = R(X^h, Y^h)\ :\qquad \begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "i\circ R(X^h,Y^h)"'] & VE \arrow[d, "i"] \\
& TE
\end{tikzcd}$$

Ennek figyelembevételével

$$K \circ R(X^h, Y^h) = (\alpha \circ \mathcal{V}) \circ (i \circ R(X^h, Y^h)) = \alpha \circ (\mathcal{V} \circ i) \circ R(X^h, Y^h) =$$
$$= \alpha \circ R(X^h, Y^h),$$

hiszen a $\mathcal{V}$ vertikális leképezésre a 8. definició szerint $\mathcal{V} \circ i = 1_{VE}$. ◍

<u>Megjegyzés</u>. A most levezetett összefüggés DOMBROWSKI /1962/, /23/-mal állitható párhuzamba. Ld. még ezzel kapcsolatban VILMS /1968/, <u>4.</u> pont!

<u>13. definició</u>

a/ A $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_\xi \arrow[r, "i"] & \tau_E \arrow[r, "\widetilde{d\pi}"] & \pi^*(\tau_B) \arrow[l, dashed, bend left, "\mathcal{H}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$

<u>horizontális leképezést integrálható</u>nak mondjuk, ha a τ_E érintőnyaláb $\operatorname{Im} \mathcal{H}$ résznyalábja <u>involutiv disztribu-</u>

ció, azaz ha olyan résznyaláb, amelyre teljesül:

$$\forall Z, V \in Sec(Im\,\mathcal{H}) : [Z, V] \in Sec(Im\,\mathcal{H}).$$

b/ Legyen $f : \tau_E \longrightarrow \tau_E$ olyan endomorfizmus, hogy $\forall z \in E : f_z : T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$ diagonalizálható lineáris transzformáció, konstans /azaz z -től független/ multiplicitású sajátértékekkel. Jelölje $S(\lambda)_\xi$ a τ_E érintőnyaláb azon résznyalábját, amelynek tetszőleges $z \in E$ pont fölötti fibruma az f_z lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó sajátaltere. - Az f endomorfizmust abban az esetben nevezzük integrálhatónak, ha valamennyi $S(\lambda)_\xi$ résznyaláb és $S(\lambda)_\xi \oplus S(\mu)_\xi \oplus \cdots \oplus S(\nu)_\xi$ Whitney-összeg involutiv disztribució az előbbi értelemben.

Megjegyzés. Az értelmezés b/ részéhez az ötletet FRÖLICHER-NIJENHUIS /1956/ Theorem III. - HAANTJES tétele - adta. /Az idézett helyen egyszersmind a majdnem-szorzat strukturákkal kapcsolatban korábban - a 10. definiciót követően - tett megjegyzéseinket jól kiegészitő történeti észrevételekkel is találkozunk./ - Az integrálhatóság tényének geometriai tartalma a jól ismert FROBENIUS-tétel alapján válik érzékletessé; az a/ esetben pl. - kissé durva szemléletességgel - arról van szó, hogy a "horizontális sikok serege" egy ugyanolyan dimenziós "felületsereg" érintősikjait szolgáltatja.

—— . ——

A II. fejezet eddigi részének fő eredménye a rövidesen kimondásra és igazolásra kerülő 1. tétel. Előkészitésként még néhány egyszerü észrevételt teszünk.

1/ Ujból emlékeztetünk arra, hogy ha $f: \tau_E \longrightarrow \tau_E$ egy endomorfizmus, akkor ez az $f: z \in E \longmapsto f_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$ interpretáció szerint E fölötti τ_E -értékü 1 -forma, másrészt azonositható azzal az I./14. állitás szerint /1,1/-tenzormezőnek tekinthető $\tilde{f}: \mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}(E)$, $Z \longmapsto \tilde{f}(Z)$ $C^\infty(E)$-lineáris leképezéssel, amely az $[\tilde{f}(Z)](z) \doteq f_z[Z(z)]$ $(z \in E)$ előirás szerint hat /14. állitás/. Az eddigiekben ezt az azonositást szimbolikai megkülönböztetés nélkül végeztük, mostani meggondolásainkban azonban a nagyobb világosság érdekében a jelölésbeli distinkcióval is élni fogunk.

2/ Érvényes a következő

<u>4. lemma</u> Jelentse h és v a $0 \longrightarrow V_E \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezéshez tartozó horizontális ill. vertikális projekciót! Akkor

a/ $[\tilde{h}, \tilde{h}] = [\tilde{v}, \tilde{v}]$;

b/ a $\tilde{h}: \mathcal{X}(E) \longrightarrow \mathcal{X}(E)$ $C^\infty(E)$ -lineáris leképezés képtere $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(E) \equiv \mathrm{Sec}(\mathrm{Im}\,\mathcal{H})$, és ez megegyezik $\tilde{v}$ nullterével.

<u>Bizonyitás</u>.

a/ $[\tilde{v}, \tilde{v}] \equiv [\tilde{\iota}_{\tau_E} - \tilde{h}, \tilde{\iota}_{\tau_E} - \tilde{h}] = [\tilde{\iota}_{\tau_E}, \tilde{\iota}_{\tau_E}] - [\tilde{h}, \tilde{\iota}_{\tau_E}] -$

$- [\tilde{\iota}_{\tau_E}, \tilde{h}] + [\tilde{h}, \tilde{h}]$.

A Nijenhuis-torzió értelmezéséből /11. definició/ közvetlenül világos, hogy itt $[\tilde{\iota}_{\tau_E}, \tilde{\iota}_{\tau_E}] = 0$, mig

$$\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{H}(E): \quad [\tilde{h}, \tilde{\iota}_{\tau_E}](Z_1, Z_2) \doteq [\tilde{h} Z_1, Z_2] + [Z_1, \tilde{h} Z_2] -$$

$$- [\tilde{h} Z_1, Z_2] - \tilde{h}[Z_1, Z_2] - [Z_1, \tilde{h} Z_2] - \tilde{h}[Z_1, Z_2] + \tilde{h}[Z_1, Z_2] +$$

$$+ \tilde{h}[Z_1, Z_2] = \sigma \implies \underline{[\tilde{h}, \tilde{\iota}_{\tau_E}] = \sigma}.$$

Ugyanigy látható, hogy $[\tilde{\iota}_{\tau_E}, \tilde{h}] = \sigma$, s igy igazoltuk a $[\tilde{v}, \tilde{v}] = [\tilde{h}, \tilde{h}]$ összefüggést.

b/ Tetszőleges $Z \in \mathcal{H}(E)$ esetén $\tilde{h} Z \in \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(E)$, hiszen

$$\forall z \in E: \ (\tilde{h} Z)(z) \doteq h_z[Z(z)] \in H_z(E).$$

Megforditva, ha $Z \in \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(E)$, akkor nyilván $Z = \tilde{h} Z \in \operatorname{Im} \tilde{h}$, következésképpen $\underline{\mathcal{H}_{\mathcal{H}}(E) = \operatorname{Im} \tilde{h}}$.

Tegyük föl, hogy $Z \in \operatorname{Ker} \tilde{v}$! Ekkor

$$\sigma = \tilde{v}(Z) = (\tilde{\iota}_{\tau_E} - \tilde{h})(Z) = Z - \tilde{h}(Z) \implies \tilde{h}(Z) = Z \in \operatorname{Im} \tilde{h}.$$

Amennyiben $Z \in \operatorname{Im} \tilde{h} = \mathcal{H}_{\mathcal{H}}(E)$, ugy $Z = \tilde{h} Z$, s ezért $\tilde{v}(Z) = \tilde{v}(\tilde{h} Z) = \sigma$ /v.ö. 15. állitás c///1//, vagyis $Z \in \operatorname{Ker} \tilde{v}$; tehát $\operatorname{Ker} \tilde{v} = \operatorname{Im} \tilde{h}$. ■

Következzék ezek után a jelzett

1. TÉTEL Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés s jelölje rendre h, v, P és R a hozzátartozó horizontális projekciót továbbá a vertikális projekciót, majdnem-szorzat strukturát és görbületi tenzormezőt. - Az alábbi kijelentések egyenértéküek:

/1/ $\mathcal{H}$ integrálható.

/2/ $R \equiv 0$.

/3/ A görbületi tenzormező komponensfüggvényei eltünnek:

$$R^{\alpha}_{ij} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^j} + \Gamma^{\beta}_{j} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^{n+\beta}} - \Gamma^{\beta}_{i} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^{n+\beta}} = 0.$$

/4/ h integrálható.

/5/ $\tilde{v}\circ[\tilde{h},\tilde{h}]=0$

/6/ v integrálható.

/7/ $[\tilde{v},\tilde{v}]=0$

/8/ $\tilde{v}\circ[\tilde{v},\tilde{v}]=0$

/9/ $[\tilde{P},\tilde{P}]=0$

/10/ P integrálható.

Bizonyitás. Megmutatjuk, hogy $(2)\Leftrightarrow(1)\Leftrightarrow(5)\Leftrightarrow(8)$ és hogy a további kijelentések /2/-vel egyenértéküek.

$(1)\Leftrightarrow(2)$ A görbületet definiáló összefüggés alapján tetszőleges $Z_1,Z_2\in\mathcal{X}(E)$ mellett

$$[\tilde{h}Z_1,\tilde{h}Z_2]=-R(Z_1,Z_2)-\tilde{h}[Z_1,Z_2]+\tilde{h}[\tilde{h}Z_1,Z_2]+\tilde{h}[Z_1,\tilde{h}Z_2]$$

irható. Itt a 17. állitás következménye folytán

$$-R(Z_1,Z_2)\in\mathcal{X}_v(E),$$

mig a jobboldal többi tagja az előrebocsátott lemma b/ része szerint $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(E)$ -be esik. Igy

$$[\tilde{h}Z_1,\tilde{h}Z_2]\in Sec(\operatorname{Im}\mathcal{H})\equiv\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(E)\Leftrightarrow R(Z_1,Z_2)=0$$

$(1)\Leftrightarrow(5)$ A most igazolt $(1)\Leftrightarrow(2)$ ekvivalenciára tekintettel az $(1)\Rightarrow(5)$ implikáció azonnal adódik, hiszen $R=-\frac{1}{2}[\tilde{h},\tilde{h}]$. Ha – megforditva – $\tilde{v}\circ[\tilde{h},\tilde{h}]=0$, akkor – ismét a lemma b/ részének figyelembevételével –

$$\operatorname{Im}[\tilde{h},\tilde{h}]\subset\operatorname{Ker}\tilde{v}=\operatorname{Im}\tilde{h}=\mathcal{X}_{\mathcal{H}}(E)\equiv Sec(\operatorname{Im}\mathcal{H}),$$

tehát $\forall\, Z_1,Z_2\in\mathcal{X}(E)$:

$$\frac{1}{2}[\tilde{h},\tilde{h}](Z_1,Z_2)=[\tilde{h}Z_1,\tilde{h}Z_2]+\tilde{h}[Z_1,Z_2]-\tilde{h}[\tilde{h}Z_1,Z_2]-$$
$$-\tilde{h}[Z_1,\tilde{h}Z_2]\in Sec(\operatorname{Im}\mathcal{H}).$$

Innen - mivel a jobboldali 2., 3. és 4. tag egyaránt $\mathrm{Sec}(\mathrm{Im}\,\mathcal{H})$ -nak eleme - $[\tilde{h}Z_1, \tilde{h}Z_2] \in \mathrm{Sec}(\mathrm{Im}\,\mathcal{H})$ következik, ami $\mathcal{H}$ integrálhatóságát jelenti.

$(5) \Longleftrightarrow (8)$ Ez a lemma a/ része alapján nyilvánvaló.

$(2) \Longleftrightarrow (3)$ Evidens.

$(2) \Longleftrightarrow (4)$ A 15. állitás következményéből kiolvasható, hogy $\forall z \in E:\ h_z : T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$ diagonalizálható lineáris transzformáció, z -től független multiplicitásu $+1$ és 0 sajátértékekkel; mégpedig a $+1$ sajátértékhez a $H_z(E)$, a 0 -hoz a $V_z(E)$ sajátaltér tartozik. Következésképpen most - a 13.b/ definició jelöléseivel - $\mathcal{S}(1)_\xi = \mathrm{Im}\,h$, $\mathcal{S}(0)_\xi = V_\xi$. Itt a V_ξ résznyaláb a 2.c/ állitásra tekintettel automatikusan involutiv disztribució, mig a nyilvánvaló $\mathrm{Im}\,h = \mathrm{Im}\,\mathcal{H}$ összefüggés miatt $\mathcal{S}(1)_\xi$ akkor és csak akkor integrálható, ha $\mathcal{R} = 0$.

$(2) \Longleftrightarrow (6)$ Ez az előző okoskodással adódik, az eltérés csupán annyi, hogy ebben az esetben $\mathcal{S}(1)_\xi = V_\xi$ és $\mathcal{S}(0)_\xi = \mathrm{Im}\,h$.

$(2) \Longleftrightarrow (7)$, következményeként a 4.a/ lemmának.

$(2) \Longleftrightarrow (9)$, mert $[\tilde{P}, \tilde{P}] = [2\tilde{h} - \tilde{i}_{\tau_E}, 2\tilde{h} - \tilde{i}_{\tau_E}] = 4[\tilde{h}, \tilde{h}] -$
$- 2[\tilde{i}_{\tau_E}, \tilde{h}] - 2[\tilde{h}, \tilde{i}_{\tau_E}] + [\tilde{i}_{\tau_E}, \tilde{i}_{\tau_E}] = -8\mathcal{R}$

/a 2., 3. és 4. tag eltünését a 4. lemma bizonyitása során igazoltuk/.

$(2) \Longleftrightarrow (10)$ A 16. állitás korolláriuma értelmében a $P_z : T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$ lineáris transzformációk diagonalizálhatók, z -től független multiplicitásu $+1$ ill. -1 sajátértékekkel rendelkeznek, s ezek közül az előbbihez a $H_z(E)$, az utóbbihoz a $V_z(E)$ sajátaltér tartozik. Igy most $\mathcal{S}(1)_\xi = \mathrm{Im}\,h$, $\mathcal{S}(-1)_\xi = V_\xi$, amiből az állitott ekvivalencia fennállása világos. ▨

Megjegyzések

1/ Az $(1) \Longleftrightarrow (2)$ kritériummal hasonló általánosságban VILMS /1968/-ban találkoztunk, VILMS tárgyalása azonban lényegesen - a görbület definciójával egyetemben - különbözik az itt bemutatottól. $(2) \Longleftrightarrow (10)$ kimutatása IANUS /1973/, Theorema 3.1. általánositását jelenti.

2/ /5/-tel egyenértékü módon nyilván $\mathcal{V} \circ \mathcal{R} = \sigma$ is irható, ami $\mathcal{H}$ integrálhatósági kritériumának további, egyszerü átfogalmazásaira nyujt módot - pl. $\mathcal{H}$ integrálható $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Im} \mathcal{R} \subset \operatorname{Ker} \mathcal{V}$; stb. ...

3/ A $\mathcal{H}$ horizontális leképezéshez tartozó $\mathcal{V} : \tau_E \longrightarrow V_\xi$ vertikális leképezés értelmezése szerint /8. definició/ $\operatorname{Ker} \mathcal{V} = \operatorname{Im} \mathcal{H}$; igy ezt ésszerü módon abban az esetben nevezhetjük integrálhatónak, ha nulltere integrálható disztribució τ_E -n . Ekkor $\mathcal{V}$ integrálhatóságának tényével a tétel 1°-10° kijelentéseinek mindegyike ekvivalens.

6. Általános konnexió, kovariáns deriválás

14. definició Legyen adva a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés s tekintsük a hozzátartozó $\mathcal{K}$ konnexióleképezést. - A

$$\nabla : \operatorname{Sec} \xi \longrightarrow A^1(B;\xi),\ \sigma \longmapsto \nabla\sigma = \mathcal{K} \circ d\sigma$$

leképezésről azt mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ által indukált általános konnexió ξ -n, a

$$\nabla_X = i(X) \circ \nabla : \operatorname{Sec} \xi \longrightarrow \operatorname{Sec} \xi \quad (X \in \mathfrak{X}(B))$$

leképezéseket pedig X szerinti kovariáns deriválásoknak nevezzük.

Megjegyzések.

1/ Mivel tetszőleges $x \in B$, $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ esetén a viszonyok a

$$\begin{tikzcd} T_x(B) \arrow[rr, "(d\sigma)_x"] \arrow[dr, dashed, "K_{\sigma(x)}\circ(d\sigma)_x"'] & & T_{\sigma(x)}(E) \arrow[dl, "K_{\sigma(x)}"] \\ & F_{\pi[\sigma(x)]} \equiv F_x & \end{tikzcd}$$

diagram szerintiek, $\underline{K\circ d\sigma}$ valóban ξ -értékű 1 -forma B -n.

2/ Az "általános konnexió" terminus elfogadásával a [GHV] monográfiát követtük, ahol /Vol.II., p. 337./ lényegében megtalálható a ∇ operátor fenti értelmezése. /Lényegében, mert ott a K konnexióleképezés csak implicit módon jut szerephez./ Ez a terminológia azonban némi kommentárt igényel. - Álláspontunk az, hogy a "konnexió" a horizontális leképezés által létrehozott geometriai szituációnak mintegy az algebrai-kalkulativ oldala, vetülete /ami természetesen csak egyike a lehetséges fölfogásoknak/ - ezért szóltunk először itt és ilyen értelemben "konnexió"-ról. Magyarázatra szorul az "általános" jelző használata is, hiszen más jelzők - legerőteljesebben talán a "nemlineáris" - ugyancsak kínálkoztak. Ezt a magyarázatot alkalmasabb helyen, a 9. alfejezetben adjuk majd meg.

3/ A

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sec}\,\xi \arrow[rr, "\nabla"] \arrow[dr, dashed, "\nabla_X"'] & & A^1(B;\xi) \arrow[dl, "i(X)"] \\ & A^0(B,\xi) \equiv \mathrm{Sec}\,\xi & \end{tikzcd}$$

diagramból láthatóan ∇_X valóban $\mathrm{Sec}\,\xi$ egy önmagába való leképezése.

5. lemma. Az általános konnexió és a hozzátartozó kovariáns deriválások kapcsolatát illetően fennáll a
$$\underline{(\nabla_X \sigma)(x) = (\nabla\sigma)_x\left[X(x)\right]} \quad (x \in B,\ X \in \mathcal{X}(B))$$
összefüggés.

Bizonyitás. Az $i(X)$ operátor értelmezésének figyelembevételével /ld. I., 3.3. szakasz/
$$(\nabla_X \sigma)(x) = \left[(i(X)\cdot\nabla)\sigma\right](x) = \left[i(X)(\nabla\sigma)\right](x) = (\nabla\sigma)_x\left[X(x)\right]. \ \odot$$

6. lemma Legyen σ az $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet fölötti metszete a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyalábnak s tekintsük $\mathcal{U}$ -n az $x^1, \dots, x^n$, $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ /szokásos/ koordinátarendszert. - A $\underline{(d\sigma)_x : T_x(B) \longrightarrow T_{\sigma(x)}(E)}$ $(x \in \mathcal{U})$ lineáris leképezést a $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x ; \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{\sigma(x)}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+r}}\right)_{\sigma(x)}$ bázisokra vonatkozóan az
$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \frac{\partial\sigma^1}{\partial x^1}(x) & \dots & & \frac{\partial\sigma^1}{\partial x^n}(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial\sigma^r}{\partial x^1}(x) & \dots & & \frac{\partial\sigma^r}{\partial x^n}(x) \end{bmatrix}$$
$(n+r)\times n$ -tipusu matrix reprezentálja, ahol a σ metszet $\sigma^1, \dots, \sigma^r$ komponens-függvényei a standard koordinátarendszer által indukált $e_1, \dots, e_r$ $\mathcal{U}$ fölötti keretezés segitségével a $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ összefüggés szerint vannak értelmezve.

Bizonyitás.

$k = 1,\dots,n$ esetén

$$\left[(d\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right]y^k = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x (y^k\circ\sigma) = \delta^k_i\,,$$

hiszen

$$y^k\circ\sigma = (x^k\circ\pi)\circ\sigma = x^k\circ(\pi\circ\sigma) = x^k\circ i_B = x^k;$$

$\alpha = 1,\dots,r$ esetén

$$\left[(d\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right]y^{n+\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x (y^{n+\alpha}\circ\sigma) = \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}(x)\,,$$

mert a 3. lemma értelmében

$$\forall x\in\mathcal{U}:\ y^{n+\alpha}[\sigma(x)] = y^{n+\alpha}[\sigma^\beta(x)e_\beta(x)] = \sigma^\beta(x)\,y^{n+\alpha}[e_\beta(x)] =$$
$$= \sigma^\beta(x)\,\delta^\alpha_\beta = \sigma^\alpha(x)\,,$$

ilymódon

$$(d\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\sigma(x)} + \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\sigma(x)} \quad (i = 1,\dots,n).$$

20. állítás. Legyen ∇ a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{\ i\ } \tau_E \underset{\mathcal{K}}{\xrightarrow{\ d\pi\ }} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés által indukált általános konnexió ξ -n. Megtartva a 6. lemma jelöléseit, legyen továbbá σ $\mathcal{U}$ fölötti metszete ξ -nek, $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ pedig vektormező $\mathcal{U}$ -n. Ekkor

$$\nabla_X\sigma = X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_i\circ\sigma\right)e_\alpha\,.$$

Bizonyitás. Tetszőleges $x\in\mathcal{U}$ mellett, az 5. és 6. lemma valamint a 12. állítás alkalmazásával kapjuk:

$$(\nabla_X\sigma)(x) = (\nabla\sigma)_x[X(x)] = (\mathcal{K}\circ d\sigma)_x\left[X^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right] =$$
$$= X^i(x)\left[(\mathcal{K}\circ d\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right] = X^i(x)\,\mathcal{K}_{\sigma(x)}\left[(d\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right] =$$

$$= X^i(x)\, K_{\sigma(x)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\sigma(x)} + \frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\sigma(x)}\right] =$$

$$= X^i(x)\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}(x) + \delta^j_i\, \Gamma^\alpha_j[\sigma(x)]\right)e_\alpha(x) =$$

$$= X^i(x)\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}(x) + \Gamma^\alpha_i[\sigma(x)]\right)e_\alpha(x) =$$

$$= \left[X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_i \circ \sigma\right)e_\alpha\right](x) \quad ,$$

ahonnan x tetszőlegessége folytán következik az állitás. ⊘

Megjegyzések

1/ Talán nem fölösleges rámutatnunk, hogy $\underline{X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_i \circ \sigma\right)}$ az

$$X^i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

és

$$\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_i \circ \sigma : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "\Gamma^\alpha_i \circ \sigma"'] & \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[d, "\Gamma^\alpha_i"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

valós értékü függvények szokásos szorzatösszege, $X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_i \circ \sigma\right)e_\alpha$ pedig az igy nyert függvényekből és az $e_1,\dots,e_r$ $\mathcal{U}$ fölötti metszetekből az I./8. állitásban bevezetett operációk révén képződik.

2/ A most levezetett összefüggés tetszőleges vektornyalábra általánositott, pontos formában fölirt alakja GRIFONE /1972/ I./22/ formulájának.

<u>21. állitás</u> Ha ∇ a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezéshez tartozó általános konnexió és $X_1, X_2, X \in \mathcal{H}(B)$, $f \in C^\infty(B)$ tetszőleges, akkor $\forall\, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$: $\underline{\nabla_{X_1+X_2}\sigma = \nabla_{X_1}\sigma + \nabla_{X_2}\sigma}$,

$$\underline{\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma}$$

Bizonyitás. A fölirt tulajdonságok közvetlenül adódnak az 5. lemma alapján; figyelembe véve, hogy $\forall x \in B : (\nabla\sigma)_x : T_x(B) \longrightarrow F_x$ lineáris leképezés /kiolvashatók azonban a lokális előállitásból is/. ⊘

Megjegyzés Hangsulyozni kell, hogy további linearitási tulajdonságot egyelőre nem állithatunk, tehát általában $\nabla_X(\sigma_1+\sigma_2) \neq \nabla_X\sigma_1 + \nabla_X\sigma_2$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Sec}\,\xi)$. Ez világos a lokális előállitásból: $\Gamma^{\alpha}_{i} \circ (\sigma_1+\sigma_2) \neq \Gamma^{\alpha}_{i} \circ \sigma_1 + \Gamma^{\alpha}_{i} \circ \sigma_2$, ill. valamivel részletesebben

$$\Gamma^{\alpha}_{i}\left(\sigma_1(x)+\sigma_2(x)\right) \neq \Gamma^{\alpha}_{i}(\sigma_1(x)) + \Gamma^{\alpha}_{i}(\sigma_2(x)),$$

ahol x az alapulvett trivializáló környezet egy pontja. Ilyen módon a 14. definicióban bevezetett kovariáns deriválás a Koszul-félének kettős értelemben is általánositása: jelenti annak egyrészt tetszőleges vektornyalábra való átvitelét, másrészt a metszetekben nem lineáris. Ráadásul a "kovariáns deriválás" elnevezés is "előlegzett bizalmat" takar; mert a $\nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma$ összefüggés sem áll fönn jelenleg, teljesülését csak további megszoritással érhetjük el /ld. a 8. alfejezetben!/. - A Koszul-konnexió és -kovariáns deriválás más módon történő általánositásai is ismeretesek, ezekre ugyancsak a 8. alfejezetben fogunk utalni.

7. Homogenitási feltétel

7. lemma Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb.

a/ A

$$\mu_t : \xi \longrightarrow \xi, \quad z \in E \longmapsto \mu_t(z) \doteq tz \in E \quad (t \neq 0 \in \mathbb{R})$$

leképezések ξ önmagára való erős nyalábizomorfizmusai.

b/ $\{\mu_t \mid t \neq 0 \in \mathbb{R}\}$ csoport, ezt ξ <u>hasonlóság-csoport</u>jának hivjuk.

c/ Amennyiben $\mathcal{U}$ trivializáló környezet ξ számára és $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ a szokásos koordinátarendszer $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n, akkor $\forall z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ és <u>tetszőleges</u> $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$(d\mu_t)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz} \quad (i = 1, \dots, n)$$

és

$$(d\mu_t)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = t \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz} \quad (\alpha = 1, \dots, r).$$

<u>Bizonyitás.</u>

a/ Az

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mu_t} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{\iota} & B \end{array}$$

diagram kommutativ, azaz

$\forall z \in E: \ \underline{\pi[\mu_t(z)] = \iota[\pi(z)]}$,

hiszen itt mindkét oldal $\pi(z)$ -t ad.

Ez azt jelenti, hogy μ_t <u>fibrumtartó</u>. Mivel

$$\forall x \in B : (\mu_t)_x : F_x \longrightarrow F_x, \ z \longmapsto tz$$

lineáris izomorfizmus és a bázisterek között indukált leképezés a diagram szerint az identitás, ami differenciálható, az I./7. állitás értelmében a μ_t leképezések valóban erős nyalábizomorfizmusok.

b/ helyessége nyilvánvaló. - A csoport egységeleme a μ_1 leképezés, μ_t inverze $\mu_{t^{-1}}$.

c/ $\underline{i = 1, \dots, n}$ esetén tetszőleges $z \in E$ mellett

$$y^i \circ \mu_t(z) = y^i(tz) = x^i \circ \pi(tz) = x^i \circ \pi(z) = y^i(z),$$

következőleg $\underline{y^i \circ \mu_t = y^i}$; ilyenkor tehát $\frac{\partial y^i \circ \mu_t}{\partial y^j} = \delta^i_j$.

Ha $\underline{\alpha = 1, \dots, r}$, ugy - a 3. lemma részleges figyelembevételével -

$$y^{n+\alpha}\circ\mu_t(z) = y^{n+\alpha}(tz) = t\,y^{n+\alpha}(z),$$

amiért is $\underline{y^{n+\alpha}\circ\mu_t = t\,y^{n+\alpha}}$, ahonnan $\dfrac{\partial y^{n+\alpha}\circ\mu_t}{\partial y^i} = 0$,

$\dfrac{\partial y^{n+\alpha}\circ\mu_t}{\partial y^{n+\beta}} = t\,\delta^\alpha_\beta$. Ezek alapján

$$\underline{(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z} = \left.\frac{\partial(y^k\circ\mu_t)}{\partial y^i}\right|_z\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{tz} = \left.\frac{\partial(y^j\circ\mu_t)}{\partial y^i}\right|_z\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{tz} +$$

$$+\left.\frac{\partial(y^{n+\alpha}\circ\mu_t)}{\partial y^i}\right|_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz} = \underline{\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz}} \;;$$

$$\underline{(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z} = \left.\frac{\partial(y^i\circ\mu_t)}{\partial y^{n+\alpha}}\right|_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz} + \left.\frac{\partial(y^{n+\beta}\circ\mu_t)}{\partial y^{n+\alpha}}\right|_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_{tz} =$$

$$= \underline{t\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}} .$$

<u>Megjegyzés</u>. A c/ részben tekintetbe vettük a $t=0$ esetet is, ami a μ_0 leképezésnek a hasonlóság-csoporthoz való hozzávételét jelenti, s amit a/-ban és b/-ben nyilván nem tehettünk meg. A $t=0$ lehetőséget rendszerint a következőkben is megengedjük, ilyenkor "σ-val kibővitett hasonlóság-csoport"-ról fogunk szólni - de ez persze már nem csoport.

<u>15. definició.</u>

a/ Legyen F és H ugyanazon Γ test fölötti <u>vektortér</u>, $p\in\mathbb{N}$. - Egy $f: F\longrightarrow H$ leképezést <u>p -edrendben homogénnek</u> mondunk, ha

$$\forall\alpha\in\Gamma,\ v\in F:\quad \underline{f(\alpha v) = \alpha^p f(v)}\;;$$

speciálisan a $H=\Gamma$ esetben p -edrendben homogén <u>függvényről</u> szólunk.

b/ Egy $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb totálterén adott $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezünk p -edrendben homogénnek ill. lineárisnak, ha a fibrumokra való leszükitései ilyenek.

Megjegyzés A b/ esetben f nyilván akkor és csak akkor elsőrendben homogén, ha $\forall\, t \in \mathbb{R}: \; f \circ \mu_t = t f$.

22. állitás /"EULER-tétel"/ Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet ξ számára; $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ a szokásos koordinátarendszer $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n és tekintsünk egy

$$f: \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenciálható függvényt. - f akkor és csak akkor elsőrendben homogén $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n, ha teljesül az

$$y^{n+\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}} = f$$

összefüggés.

Bizonyitás.

a/ Tegyük föl, hogy f elsőrendben homogén $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ -n. Tetszőlegesen rögzitett $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ mellett tekintsük a

$$\mu_z: \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}),\; t \longmapsto \mu_t(z) \doteq tz$$

leképezést és ennek segitségével készitsük el a

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto g(t) \doteq (f \circ \mu_z)(t) \; /= f(tz)/$$

függvényt. Ez nyilván differenciálható; deriváltja a láncszabály alkalmazásával

$$g' = \frac{\partial f}{\partial y^A} \circ \mu_z \, (y^A \circ \mu_z)' = \frac{\partial f}{\partial y^i} \circ \mu_z (y^i \circ \mu_z)' + \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}} \circ \mu_z \, (y^{n+\alpha} \circ \mu_z)'.$$

Itt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y^i \circ \mu_z)(t) = y^i(tz) = x^i \circ \pi(tz) = x^i \circ \pi(z) = y^i(z),$$

következőleg

$$y^i \circ \mu_z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{konst.} \quad (i = 1, \dots, n),$$

tehát $\underline{(y^i \circ \mu_z)' = 0}$, míg

$$y^{n+\alpha} \circ \mu_z(t) = y^{n+\alpha}(tz) = t\, y^{n+\alpha}(z) \quad (\alpha = 1, \dots, r),$$

ahonnan $\underline{(y^{n+\alpha} \circ \mu_z)' = y^{n+\alpha}(z)}$. Igy egyrészt

$$g' = \left(\frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}} \circ \mu_z\right) y^{n+\alpha}(z)$$

s ezért

$$g'(1) = \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}}(z)\, y^{n+\alpha}(z) = \left(y^{n+\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}}\right)(z),$$

másrészt a homogenitás miatt $g(t) = f(tz) = t f(z)$,

amiből $g'(1) = f(z)$.

A két eredmény összevetése az állitásban szereplő relációt adja.

b/ Ha - megforditva - $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött fennáll az $f = y^{n+\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}}$ összefüggés, akkor tetszőlegesen rögzitett $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ mellett tekintsük a

$$g \doteq f \circ \mu_z - f(z)\, \iota_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényt. Ez differenciálható, deriváltja

$$g' = \frac{\partial f}{\partial y^A} \circ \mu_z\, (y^A \circ \mu_z)' - f(z) = \frac{\partial f}{\partial y^i} \circ \mu_z\, (y^i \circ \mu_z)' +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}} \circ \mu_z\, (y^{n+\alpha} \circ \mu_z)' - f(z) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y^{n+\alpha}}(z)\, y^{n+\alpha}(z) - f(z) = 0\,;$$

g tehát konstans függvény, sőt a zéró-függvény, mivel $g(1) = f(z) - f(z) = 0$. Igy $f \circ \mu_z = f(z)\, \iota_{\mathbb{R}}$, azaz

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad \underline{f(tz) = t f(z)} \quad /z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})/ \quad ▧$$

<u>Következmény</u> Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, $f \in C^1(E)$. - f akkor és csak akkor elsőrendben homogén, ha $\underline{C(f) = f}$, ahol $C \in \mathfrak{X}(E)$ a kanonikus vektormező.

<u>Bizonyitás</u>. Ez a 4. állitás figyelembevételével közvetlenül adódik az EULER-tételből. ▨

<u>Megjegyzés</u>. Állitásunk EULER homogén függvényekre vonatkozó klasszikus tételének egy speciális esetét $(p = 1)$ <u>vektornyaláb</u> totálterén adott homogén függvényekre általánositja. A bizonyitás során lényegében ugyanazt a fogást alkalmaztuk, amellyel a klasszikus verzió igazolása is történik; a $p = 1$ esetre való szoritkozás voltaképpen nem lényeges. Az a feltételünk viszont, hogy f $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ <u>minden</u> pontjában legyen differenciálható, tulzottan erős követelmény. Következményeit a soronjövő alfejezetben fogjuk levonni és kiaknázni. - Az állitás korolláriuma a homogenitás alternativ tárgyalását teszi lehetővé; ilyen utat követ KLEIN-VOUTIER /1968/ és ennek nyomán GRIFONE /1972/ - v.ö. a 3. definició utáni 2/ megjegyzéssel!

<u>16. definició</u>. Azt mondjuk, hogy a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\longrightarrow}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés <u>eleget tesz a homogenitási feltételnek</u>, ha a hozzátartozó h horizontális projekció fölcserélhető a σ -val kibővitett hasonlóság-csoport elemeinek differenciáljaival, azaz ha $\forall t \in \mathbb{R}:$ $\underline{d\mu_t \circ h = h \circ d\mu_t}$, ill. részletesebben formában

$$\forall t \in \mathbb{R}, z \in E: \quad \underline{(d\mu_t)_z \circ h_z = h_{tz} \circ (d\mu_t)_z}.$$

A jelen pont hátralevő részét, sőt tulajdonképpen a következő alfejezetet is annak szenteljük, hogy kibontsuk a most megfogalmazott homogenitási feltétel tartalmát és geometriai konzekvenciáit. Ehhez még bizonyos előkészületeket kell tennünk; ezt célozza a "tenzió-tenzormező" bevezetése, valamint egy vektornyaláb "érintő fibrálásának" megkonstruálása.

<u>17. definició</u>. Legyen a $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\longrightarrow}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezéshez tartozó horizontális projekció $h \in \mathcal{H}^1_1(E)$ s tekintsük a $C \in \mathcal{H}(E)$ kanonikus vektormezőt. - A

$$\mathcal{T} : \mathcal{H}(E) \longrightarrow \mathcal{H}(E), Z \longmapsto \mathcal{T}(Z) \doteq [C, hZ]$$

tenzormezőt a $\mathcal{H}$ horizontális leképezés <u>tenzió-tenzormező</u>jének nevezzük.

<u>Megjegyzés</u>. Az elnevezésben GRIFONE /1972/-t követtük, s noha konstrukciónak <u>nem</u> ekvivalens az általa adottal, a tenzió tárgyalásunkban is lényegében ugyanazt a szerepet fogja betölteni, mint Grifone munkájában. - Megemlitendő, hogy a WONG-MOK /1976/-ban szereplő un. <u>h-torzió</u> szintén ilyen funkcióju.

<u>23. állitás.</u> Legyen h ill. $\mathcal{T}$ a $0 \longrightarrow V_\xi \longrightarrow \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{d\pi}{\longrightarrow}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezéshez tartozó horizontális projekció, ill. tenzió-tenzormező. Kiválasztva egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezetet, tekintsük $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött a

$$Z = Z^A \frac{\partial}{\partial y^A} = Z^i \frac{\partial}{\partial y^i} + Z^{n+\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$$

vektormezőt. - Ekkor

$$\underline{\mathcal{T}(Z) = y^{n+\alpha} \frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}} h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + Z^i\left(\Gamma^\beta_i - y^{n+\alpha} \frac{\partial \Gamma^\beta_i}{\partial y^{n+\alpha}}\right) \frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}.}$$

<u>Bizonyitás</u>. A 4. és a 15.b/ állitás szerint $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött $C = y^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}$ ill. $hZ = Z^i\frac{\partial}{\partial y^i} - Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}$,

igy

$$\mathcal{T}(Z) = [C, hZ] = \left[y^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, Z^i\frac{\partial}{\partial y^i} - Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] =$$

$$= \left[y^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, Z^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right] - \left[y^{n+\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] =$$

$$= y^{n+\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, Z^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right] - Z^i\frac{\partial y^{n+\alpha}}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} - y^{n+\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}, Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right] +$$

$$+ Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial y^{n+\alpha}}{\partial y^{n+\beta}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} = y^{n+\alpha}\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^i} - y^{n+\alpha}\Gamma_i^\beta\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} -$$

$$- Z^i y^{n+\alpha}\frac{\partial \Gamma_i^\beta}{\partial y^{n+\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} + Z^i\Gamma_i^\beta\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}} =$$

$$= y^{n+\alpha}\frac{\partial Z^i}{\partial y^{n+\alpha}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + Z^i\left(\Gamma_i^\beta - y^{n+\alpha}\frac{\partial \Gamma_i^\beta}{\partial y^{n+\alpha}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}.$$

<u>Következmény</u> Ha $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ a <u>bázissokaság</u> $\mathcal{U}$ fölötti vektormezője, akkor

$$\mathcal{T}(X^h) = (X^i\circ\pi)\left(\Gamma_i^\alpha - y^{n+\beta}\frac{\partial\Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}.$$

<u>Bizonyitás</u>. A 9. állitás értelmében

$$X^h = (X^v)^v\left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right) = (X^i\circ\pi)\left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)$$

/ahol $X^i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $i = 1,\dots,n$ /, igy most

$$\mathcal{T}(X^h) = y^{n+\alpha}\frac{\partial(X^i\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}}h\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + (X^i\circ\pi)\left(\Gamma_i^\alpha - y^{n+\beta}\frac{\partial\Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}},$$

ahol azonban

$$\frac{\partial(X^i\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\circ\pi\right)\frac{\partial(x^j\circ\pi)}{\partial y^{n+\alpha}} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\circ\pi\right)\frac{\partial y^j}{\partial y^{n+\alpha}} = 0.$$

8. lemma Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}$ vektornyaláb-koordinátaelőállitással, H pedig egy $2\dim F$ dimenzióju vektortér. Ekkor

$$T\xi \doteq (TE, d\pi, TB, H)$$

vektornyaláb - ξ un. érintő fibrálása - és

$\{(\pi_B^{-1}(\mathcal{U}_\alpha), d\psi_\alpha)\}$ /ahol π_B a τ_B érintőnyaláb projekciója/ egy vektornyaláb-koordinátaelőállitás $T\xi$ számára.

Bizonyitás. Ld. pl. [G], Ch.IX.1. ▨

Megjegyzés. A ξ -n használt szokásos lokális koordinátarendszer segitségével megadjuk a $T\xi$ vektornyaláb fibrumainak egy leirását. - Legyen $a \in TB$ tetszőleges; mondjuk - a nagyobb határozottság kedvéért - $a \in T_x(B)$, $a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$.

Tegyük föl, hogy $b \in (d\pi)^{-1}(a)$; pl.

$$b \in T_z(E),\ b = b^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z,\ \pi(z) = x.$$

Ekkor az I./1. példa figyelembevételével

$$(d\pi)_z b = b^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x,$$

ami azt jelenti, hogy $b^1 = a^1, \dots, b^n = a^n$. Ilymódon az $a \in TB$ fölötti fibrum

$$(d\pi)^{-1}(a) \equiv (d\pi)^{-1}\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right] = \left\{a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \,\middle|\, \begin{array}{l}\pi(z) = x,\\ b^1, \dots, b^r \text{ tetsz.}\end{array}\right\}.$$

A $(d\pi)^{-1}(a)$ -beli vektortér-operációkra [GKlM]2.4./2. lemmájának esetünkre való kézenfekvő átvitelével azt kapjuk, hogy

$$\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] + \left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{z'} + \tilde{b}^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{z'}\right] =$$

$$= a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{z+z'} + (b^\alpha + \tilde{b}^\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{z+z'} \quad /\pi(z) = \pi(z')/,$$

iii.

$$\lambda\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\lambda z} + \lambda b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\lambda z}$$

Most már sor kerülhet alfejezetünk fő eredményének kimondására és igazolására.

__2. TÉTEL__ Egy $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow{\widetilde{d\pi}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezésre a következő kijelentések egyenértékűek:

1. $\mathcal{H}$ eleget tesz a __homogenitási feltételnek__.
2. $\mathcal{H}$ tenzió-tenzormezőjére tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(B)$ esetén $\underline{\mathcal{T}(X^h) = 0}$ teljesül.
3. Ha $\mathcal{K}$ a $\mathcal{H}$-hoz tartozó konnexióleképezés és μ_t a σ-val kibővitett hasonlóság-csoport tetszőleges eleme, akkor $\underline{\mathcal{K} \circ d\mu_t = \mu_t \circ \mathcal{K}}$.
4. A $\mathcal{H}$-hoz tartozó konnexióleképezés __elsőrendben homogén leképezés__ a $T\xi$ nyaláb fibrumain.
5. $\mathcal{H}$ __konnexióparaméterei__ elsőrendben homogén függvények a trivializáló környezetek projekció-inverzein.

__Bizonyitás.__ Alapulvéve egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekció-inverze fölött az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+r}$ standard koordinátarendszert, tételünket ugy igazoljuk, hogy rendre megmutatjuk az 1.–4. kijelentések 5.-tel való ekvivalenciáját.

1. $\Longrightarrow$ 5. A 15. állitás b/ és a 7. lemma c/ részében mondottak alapján számolunk.

$\underline{i = 1, \dots, n}$ esetén

$$(d\mu_t)_z\left[h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right]=(d\mu_t)_z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z-\Gamma^\alpha_i(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz}-\Gamma^\alpha_i(z)\left[t\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}-t\left(\Gamma^\alpha_i\circ\mu_{t^{-1}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)\circ\mu_t\right](z),$$

föltéve, hogy $t\neq 0$. Ha $t=0$, akkor

$$(d\mu_0)_z\left[h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right]=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{0\cdot z}=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{0_x}\qquad(\pi(z)=x)$$

adódik. - A másik oldal:

$$\left[h_{tz}\circ(d\mu_t)_z\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z=h_{tz}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz}=\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz}-\Gamma^\alpha_i(tz)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)\circ\mu_t\right](z).$$

Igy azt kapjuk, hogy

$$\left[(d\mu_t)_z\circ h_z\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z=\left[h_{tz}\circ(d\mu_t)_z\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\iff$$

$$t\,\Gamma^\alpha_i\circ\mu_{t^{-1}}=\Gamma^\alpha_i\quad(t\neq 0)\ \wedge\ \Gamma^\alpha_i\circ\mu_0=0,$$

az utóbbi kijelentés viszont azzal ekvivalens, hogy

$$\underline{\forall t\in\mathbb{R}:\ \Gamma^\alpha_i\circ\mu_t=t\,\Gamma^\alpha_i}$$

- Meg kell még vizsgálnunk az operációk hatását a vektorok fölött. Ezekre $(d\mu_t)_z\left[h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]=0$, míg

$$h_{tz}\left[(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]=h_{tz}\left[t\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}\right]=0,$$

tehát most $h_{tz}\left[(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]=(d\mu_t)_z\left[h_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right]$

automatikusan fennáll. Ilymódon

$\underline{\underline{1}}.$ $:\iff d\mu_t\circ h=h\circ d\mu_t\iff t\,\Gamma^\alpha_i=\Gamma^\alpha_i\circ\mu_t:\iff$ $\underline{\underline{5}}.$ teljesül.

$\underline{\underline{2}}.\iff\underline{\underline{5}}.$ A 23. állítás következménye folytán a $\underline{\underline{2}}.$ feltétel lokálisan azzal ekvivalens, hogy

$$\Gamma^{\alpha}_{i} = y^{n+\beta}\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^{n+\beta}} \qquad (i=1,\dots,n;\ \alpha=1,\dots,r);$$

ez viszont a 21. állitás /"EULER-tétel"/ értelmében pontosan akkor áll fenn, ha a Γ^{α}_{i} függvények - $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött - elsőrendben homogének.

$\underline{\underline{3}}. \Longleftrightarrow \underline{\underline{5}}.$ Ismét a 7. lemma c/ részének alkalmazásával, továbbá a 12. állitást fölhasználva

$\underline{i=1,\dots,n}$ esetén egyrészt

$$\mu_t\left[K_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right] = t\,\Gamma^{\alpha}_{i}(z)\,e_{\alpha}(x) \qquad (x=\pi(z)),$$

másrészt

$$K_{tz}\left[(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right] = K_{tz}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz} = \Gamma^{\alpha}_{i}(tz)\,e_{\alpha}(x)$$

adódik, mig az operációkat a $\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z$ vektorok fölött végezve azt kapjuk, hogy

$$\mu_t\left[K_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = t\,e_{\alpha}(x) \quad , \qquad \text{ill.}$$

$$K_{tz}\left[(d\mu_t)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = K_{tz}\left[t\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}\right] = t\,e_{\alpha}(x),$$

tehát a $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ környezetben

$$\underline{\underline{3}}.\ :\Longleftrightarrow \mu_t\circ K_z = K_{tz}\circ(d\mu_t)_z \Longleftrightarrow t\,\Gamma^{\alpha}_{i}(z) = \Gamma^{\alpha}_{i}(tz)$$

$$\Longleftrightarrow t\,\Gamma^{\alpha}_{i} = \Gamma^{\alpha}_{i}\circ\mu_t \quad :\Longleftrightarrow \underline{\underline{5}}.\ \text{teljesül.}$$

$\underline{\underline{4}}. \Longleftrightarrow \underline{\underline{5}}.$ Közvetlenül látható, hogy a $K: TE \to E$ konnexió-leképezés <u>fibrumtartó</u> $T\xi \longrightarrow \xi$ leképezést származtat. K $T\xi$ fibrumain való <u>homogenitása</u> a 8. lemmát követő megjegyzés alapján azt jelenti, hogy tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$K_{tz}\left[t\left(a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right)\right] = t\,K_z\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right],$$

ahol

$$t\left[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z\right] = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{tz} + t b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{tz}$$

folytán a baloldal $\left[tb^\alpha + a^i\Gamma^\alpha_i(tz)\right]e_\alpha(x)$; azaz hogy

$$\left[tb^\alpha + a^i\Gamma^\alpha_i(tz)\right]e_\alpha(x) = \left[tb^\alpha + ta^i\Gamma^\alpha_i(z)\right]e_\alpha(x).$$

Ez az összefüggés viszont akkor és csak akkor teljesül, ha $t\,\Gamma^\alpha_i = \Gamma^\alpha_i \circ \mu_t$, azaz ha 5. fennáll.

Megjegyzés. Tételünk különböző alternativák közötti választást tesz lehetővé a homogenitási feltétel megfogalmazását illetően. - GRIFONE /1972/ - a $\xi = \tau_E$ speciális esetben - 2. megfelelőjét választja definiáló tulajdonságnak, mig VILMS /1968/ 4.-et. Mi ugy éreztük - s ez persze szubjektiv dolog-, hogy a $d\mu_t \circ h = h \circ d\mu_t$ feltétel a leginkább "geometriai izü" s ezért ez felel meg a legjobban tárgyalásunk szellemének. Ilyen tipusu feltételt fogalmaz meg [Sp] Vol.II., 8.56./ és BARTHEL /1963/ /p.122./ is, a horizontális disztribuciók nyelvén. - Ezzel a lehetőségek fölsorolása még távolról sem teljes. A további alternativákat illetően utalunk egyrészt a [GHV] monográfiára /Vol.II. Ch.VII., §6./, másrészt következő alfejezetünkre, amely burkolt formában tartalmaz ilyeneket.

8. Lineáris és nemlineáris konnexiók

A 22. állitást követő megjegyzésben már jeleztük, hogy homogén függvények tárgyalásánál a mindenütt való differenciálhatóság megkövetelése rendkivül erős megszoritás. Ennek okára és következményeire mutatunk most rá.

<u>9. lemma.</u> /P.DOMBROWSKI/ Ha az $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény elsőrendben homogén és <u>a σ pontban létezik a /Frechet-féle/ deriváltja</u>, akkor f <u>lineáris</u> függvény.

<u>Bizonyitás</u>. / [Sp], Vol.II. 8.58./

Jelölje $df(\sigma)$ az f függvény σ -beli deriváltját /ami egy $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>lineáris</u> függvény/. Tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektort véve, kétféleképpen fölirjuk az f skalármező <u>v vektor</u> szerinti, σ -beli deriváltját. - Egyrészt $f'(\sigma, v) = [df(\sigma)](v)$, másrészt f homogenitásának figyelembevételével

$$f'(\sigma; v) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(\sigma + tv) - f(\sigma)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[t f(v)\right] = f(v),$$

következőleg $\underline{f = df(\sigma)}$. ◍

<u>Megjegyzés</u>. Ezt a lemmát az igen szinesen fogalmazó M.Spivak a "clever observation" megkülönböztető titulussal látja el, mi is igy fogunk rá hivatkozni. Az észrevételt a differenciálgeometriai irodalomban egyöntetüen P. DOMBROWSKI-nak tulajdonitják, utalva DOMBROWSKI /1962/-re, ahol /p.84., 9// bizonyitással együtt megtalálható - kevéssé hihető azonban, hogy erre korábban egyáltalán nem figyeltek volna föl. Kétségtelen viszont - és rögtön ki is derül-, hogy ez az egyszerü tényállás éppen differenciálgeometriai kihatásaiban nagy horderejü - s föltehetőleg ez nem volt eleinte kellőképpen világos.

<u>24. állitás</u> Homogenitási feltételnek eleget tevő horizontális leképezés esetén

a/ a konnexióleképezés <u>lineáris</u> leképezése a $T\xi$ érintő fibrálás fibrumainak s igy $\underline{T\xi \to \xi}$ <u>nyalábleképezésnek is</u> tekinthető;

b/ a konnexióparaméterek <u>lineáris függvények</u> a trivializáló környezetek projekció-inverzein, következésképpen /a szokásos lokális leirás mellett/

$$\Gamma_i^\alpha = y^{n+\beta}\left(\Gamma_{i\beta}^\alpha \circ \pi\right) \quad (i = 1,\dots,n;\ \alpha = 1,\dots,r),$$

ahol $\Gamma_{i\beta}^\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\Gamma_{i\beta}^\alpha[\pi(z)] = \dfrac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}(z)$

/$\mathcal{U}$ az alapulvett trivializáló környezet/.

Bizonyitás. A 2. tétel /közelebbről az ottani 1.$\Longleftrightarrow$4. valamint az 1.$\Longleftrightarrow$5. ekvivalencia/ és a "clever observation" alapján mind a konnexióleképezés, mind a konnexióparaméterek állitott linearitása közvetlenül következik. - A konnexióparaméterek konkrét alapjához az alábbi módon jutunk: - Mivel a $\Gamma_i^\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények F_x fibrumokra való $\left(\Gamma_i^\alpha\right)_x$ leszükitései most lineárisak, a $\dfrac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ parciális deriváltak leszükitései $\left(\dfrac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}\right)_x : F_x \longrightarrow \mathbb{R}$ konstans függvények, megadhatók tehát hozzájuk olyan $\Gamma_{i\beta}^\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy

$$\forall z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) : \frac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}(z) = \Gamma_{i\beta}^\alpha\left[\pi(z)\right].$$

Mivel a 22. állitás figyelembevételével $\Gamma_i^\alpha = y^{n+\beta}\dfrac{\partial \Gamma_i^\alpha}{\partial y^{n+\beta}}$, igy $\Gamma_i^\alpha = y^{n+\beta}\left(\Gamma_{i\beta}^\alpha \circ \pi\right)$ adódik. ⊘

Megjegyzés. Kiderült tehát: a $\mathcal{H}$ -ra előirt homogenitási feltétel a "clever observation" jóvoltából sokkal többet: linearitást von maga után. Igy indokolt a következő értelmezés:

18. definició Homogenitási feltételnek eleget tevő horizontális leképezéshez tartozó általános konnexiót lineáris konnexiónak mondunk.

<u>25. állitás</u> Ha ∇ homogenitási feltételnek eleget tevő horizontális leképezéshez tartozó - vagyis <u>lineáris</u> - konnexió, akkor a $\nabla : \mathrm{Sec}\,\xi \longrightarrow A^1(B;\xi)$ leképezés <u>$\mathbb{R}$ -lineáris leképezés</u> és

$$\forall\, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi\,,\ f \in C^\infty(B):\ \underline{\nabla(f\sigma) = \delta f \wedge \sigma + f(\nabla\sigma)}.$$

<u>Bizonyitás.</u>

a/ <u>∇ $\mathbb{R}$ -lineáris leképezés</u>

Mivel - ld. 14. definició! - $\nabla\sigma = K\circ d\sigma$, ahol K a megadott horizontális leképezéshez tartozó konnexióleképezés, azt kell belátnunk, hogy

$$\forall\, \sigma_1,\sigma_2 \in \mathrm{Sec}\,\xi: \qquad K\circ d(\sigma_1+\sigma_2) = K\circ d\sigma_1 + K\circ d\sigma_2\,,$$
$$\forall\, \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi\,,\ t\in\mathbb{R}: \qquad K\circ d(t\sigma) = t\,K\circ d\sigma.$$

- Kiválasztva egy $\mathcal{U}\subset B$ trivializáló környezetet, tekintsük $\mathcal{U}$ -n az $x^1,\dots,x^n$, projekció-inverzén a szokásos $y^1,\dots,y^n,y^{n+1},\dots,y^{n+r}$ lokális koordinátarendszert. A 6. lemma figyelembevételével, továbbá a 12. állitás alapján

$$K_{(\sigma_1+\sigma_2)(x)}\circ d(\sigma_1+\sigma_2)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x =$$
$$= K_{\sigma_1(x)+\sigma_2(x)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\sigma_1(x)+\sigma_2(x)} + \left(\frac{\partial\sigma_1^\alpha}{\partial x^i}(x) + \frac{\partial\sigma_2^\alpha}{\partial x^i}(x)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\sigma_1(x)+\sigma_2(x)}\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial\sigma_1^\alpha}{\partial x^i}(x) + \frac{\partial\sigma_2^\alpha}{\partial x^i}(x) + \Gamma^\alpha_i\left[\sigma_1(x)+\sigma_2(x)\right]\right]e_\alpha(x).$$

Ugyanilyen okokból

$$K_{\sigma_1(x)}\circ(d\sigma_1)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \left[\frac{\partial\sigma_1^\alpha}{\partial x^i}(x) + \Gamma^\alpha_i\left[\sigma_1(x)\right]\right]e_\alpha(x)\,,$$

$$K_{\sigma_2(x)}\circ(d\sigma_2)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \left[\frac{\partial\sigma_2^\alpha}{\partial x^i}(x) + \Gamma^\alpha_i\left[\sigma_2(x)\right]\right]e_\alpha(x).$$

Mivel a 24.a/ állitás szerint K <u>lineáris</u> leképezése a $T\xi$ nyaláb fibrumainak,

$$\Gamma^{\alpha}_{i}\left[\sigma_1(x)+\sigma_2(x)\right]=\Gamma^{\alpha}_{i}\left[\sigma_1(x)\right]+\Gamma^{\alpha}_{i}\left[\sigma_2(x)\right],$$

amiből következik ∇ <u>additivitása</u>. - A homogenitás ugyanigy mutatható meg, de a tüstént igazolásra kerülő második tulajdonság speciális eseteként is adódik.

b/ $\underline{\nabla(f\sigma)=\delta f\wedge\sigma+f(\nabla\sigma)}$

Ismét a 6. lemmát és a 12. állitást alkalmazzuk. Ezek szerint

$$\left[\nabla(f\sigma)\right]_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=K_{f(x)\sigma(x)}\cdot d(f\sigma)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=$$

$$=K_{f(x)\sigma(x)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(x)\sigma(x)}+\left(\frac{\partial(f\sigma^{\alpha})}{\partial x^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{f(x)\sigma(x)}\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\sigma^{\alpha}(x)+f(x)\frac{\partial\sigma^{\alpha}}{\partial x^i}(x)+\Gamma^{\alpha}_{i}\left[f(x)\sigma(x)\right]\right)e_{\alpha}(x).$$

Másfelől az I./15. állitás s az ezt követő megjegyzés figyelembevételével

$$\left(\delta f\wedge\sigma\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\equiv\left(\delta f\otimes\sigma\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=\left[\left(\delta f\right)_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right]\sigma(x)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\,\sigma(x),$$

mig

$$\left[f(\nabla\sigma)\right]_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=\left[f(x)\left(K\circ d\sigma\right)_x\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x=$$

$$=f(x)\left[\frac{\partial\sigma^{\alpha}}{\partial x^i}(x)+\Gamma^{\alpha}_{i}\left(\sigma(x)\right)\right]e_{\alpha}(x),$$

tehát a bizonyitandó összefüggés jobboldala

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\sigma^{\alpha}(x)+f(x)\frac{\partial\sigma^{\alpha}}{\partial x^i}(x)+f(x)\Gamma^{\alpha}_{i}\left(\sigma(x)\right)\right]e_{\alpha}(x)$$

s igy a kivánt egyenlőség következik a 2. tétel alapján /mégpedig az $\underline{\underline{1}}.\Leftrightarrow\underline{\underline{4}}.$ ekvivalenciából/. ▨

<u>Következmény</u> Ha ∇ lineáris konnexió, a hozzátartozó kovariáns deriválásokra teljesülnek a következők:

$\forall\ X, Y \in \mathcal{X}(B);\ \sigma, \tau \in Sec\,\xi,\ f \in C^\infty(B)$ esetén

I. $\nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma,$

II. $\nabla_{X+Y}(\sigma) = \nabla_X\sigma + \nabla_Y\sigma,$

III. $\nabla_{fX}(\sigma) = f\nabla_X\sigma;$

IV. $\nabla_X(\sigma+\tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau.$

<u>Bizonyitás</u>. II. és III. a 21. állitás szerint általános konnexiókra is igaz, I. és IV. pedig közvetlenül adódik az iménti állitásból.▨

<u>Megjegyzések</u>

1/ A $\underline{\nabla(f\sigma) = df\wedge\sigma + f(\nabla\sigma)}$ összefüggés biztositja I. teljesülését, vagyis azt, hogy a kovariáns deriválások valóban <u>derivációi</u> legyenek a $Sec\,\xi$ $C^\infty(B)$ -modulusnak. Kiemelendő, hogy leszármaztatása lehetséges volt pusztán a 2. tétel segitségével, tehát a "clever observation" alapján a 24. állitásban megfogalmazott jelentős plusz-információ <u>nélkül</u>. Ezt a körülményt rövidesen gyümölcsöztetjük!

2/ A [GHV] monográfia /Vol.II., 318./ az állitásban szereplő tulajdonságokkal <u>definiálja</u> a lineáris konnexiót. Ilyen /erősen algebrai izü inditású/ fölépités esetén a ∇ "operátor"-ból kiindulva konstruálandó és konstruálható /ld. id. hely, p.336./ <u>horizontális leképezés</u>. - V.ö. ezt a 2. tételt követő megjegyzéssel is!

3/ A következményt is figyelembe véve megállapithatjuk: a homogenitási feltételnek eleget tevő horizontális leképezéshez tartozó általános konnexióként definiált <u>lineáris</u> konnexió a KOSZUL-konnexió tetszőleges - de persze véges dimenziós - vektornyalábokra való közvetlen általánosítása.

4/ Az I.-IV. tulajdonságok közül - mint láttuk - általános konnexióhoz tartozó kovariáns deriválásra csak II. és III. teljesül. Az I.-IV. feltételek alkalmas, de kevésbé "radikális" gyöngitésével az általános konnexió által indukáltat speciális esetként tartalmazó kovariáns deriválás, ill. ezt származtató konnexió vezethető be. Kiegészitve a 21. állitást követő megjegyzést is, megemlitjük ezzel kapcsolatban, hogy KANDATU /1966/ - Shigeru ISHIHARA ötlete alapján - a $\xi = \tau_B$ esetben un. nemlineáris konnexiót olyan

$$D:\ \mathcal{X}(B)\times\mathcal{X}(B)\longrightarrow\mathcal{X}(B),\ (X,Y)\longmapsto D_XY$$

leképezésként definiál, amely eleget tesz a KOSZUL-féle I.-III. feltételeknek, a IV. feltételt pedig a

IV.$_1$. $(D_XY)(x)=(\nabla_XY)(x)$, ha $Y(x)=\sigma$

/ $x\in B$; ∇ tetsz. lineáris konnexió τ_B -n/;

és

IV.$_2$. $[D_X(Y+\bar{Y})](x)=(D_XY)(x)+(D_X\bar{Y})(x)$, ha $Y(x)+\bar{Y}(x)=\sigma$ $(x\in B)$

gyengitett verzió pótolja. - Ez a konstrukció egyszerüen átvihető tetszőleges vektornyalábra, a "konnexió"-t olyan $D:\ \mathrm{Sec}\,\xi\longrightarrow A^1(B;\xi)$ leképezésként értelmezve, amely

1/ eleget tesz a $D(f\sigma)=\delta f\wedge\sigma+f(D\sigma)$ összefüggésnek;

2/ $\forall X \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$: az $i(X) \cdot D \doteq D_X$ operátorok teljesitik az

/i/ $(D_X\sigma)(x) = (\nabla_X\sigma)(x)$, ha $\sigma(x) = \sigma$ $(x \in \mathcal{B}$, ∇ tetszőleges lineáris konnexió ξ -n/;

/ii/ $[D_X(\sigma + \bar{\sigma})](x) = (D_X\sigma)(x) + (D_X\bar{\sigma})(x)$, ha $\sigma(x) + \bar{\sigma}(x) = \sigma$.

feltételeket.

Hasonló szituációban lényegében ilyen utat követ AKO /1966/; mi ezt az elképzelést ebben a dolgozatban nem munkáljuk ki részletesebben. - Mivel a most emlitetteknél a 14. definicióban bevezetett konnexió-fogalom természetszerüen általánosabb, az elmondottak már elég erős érvet adnak kezünkbe az "általános" jelző használatára. Alfejezetünk végére érve azonban a helyzet még világosabb lesz: addigra pontos megkülönböztetést teszünk "általános", "lineáris" és un. "nemlineáris" konnexió között.

26. állitás

a/ Homogenitási feltételnek eleget tevő horizontális leképezéshez tartozó konnexióleképezés lokálisan a

$$K_z(a) = (a^{n+\alpha} + a^i y^{n+\beta}(z)\Gamma^{\alpha}_{i\beta}(x))e_\alpha(x)$$

$$\left(a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z \in T_z(E)\,,\ x = \pi(z)\right)$$

formula szerint hat.

b/ Ha ∇ lineáris konnexió és $X \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$, akkor tetszőleges $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ esetén lokálisan

$$\nabla_X\sigma = X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^{\alpha}_{i\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha$$

/ $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ az alapulvett trivializáló környezet fölött, $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$; $e_1, \dots, e_r$ a standard koordinátarendszer által indukált keretezés/.

Bizonyitás. A homogenitási feltétel által implikált linearitás miatt a 24.b/ állitás szerint

$$\Gamma_i^\alpha = \left(\Gamma_{i\beta}^\alpha \circ \pi\right) y^{n+\beta}.$$

Ezt behelyettesitve a 12. állitásban megadott összefüggésbe, rögtön a/-t kapjuk, a 20. állitásból pedig

$$\left(\nabla_X \sigma\right)(x) = \left[X^i \left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_i^\alpha \circ \sigma\right) e_\alpha\right](x) =$$

$$= X^i(x)\left[\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i}(x) + \left(\Gamma_{i\beta}^\alpha \circ \pi\right)\sigma(x)\, y^{n+\beta}(\sigma(x))\right] e_\alpha(x) =$$

$$= X^i(x)\left[\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i}(x) + \Gamma_{i\beta}^\alpha(x)\,\sigma^\beta(x)\right] e_\alpha(x) = \left[X^i\left(\frac{\partial \sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma_{i\beta}^\alpha \sigma^\beta\right) e_\alpha\right](x)$$

adódik, amiből b/ következik. ▨

Következmény. Ha $\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{U} \longrightarrow \pi_B^{-1}(\mathcal{U})$ $(i = 1, \dots, n)$ a koordinátavektormezők az $\mathcal{U}$ trivializáló környezet fölött és $e_\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$; $\alpha = 1, \dots, r$ a standard koordinátarendszer által indukált keretezés, akkor

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} e_\beta = \Gamma_{i\beta}^\alpha e_\alpha . \quad ▨$$

Megjegyzés. A Koszul-féle fölépités esetén az utóbbi összefüggés /megfelelője/ alapján szokás bevezetni a konnexió-paramétereket.

—— . ——

A soronkövetkező értelmezés előkészitéseként lerögzitjük, hogy ha M és N az $\mathcal{R}$ kommutativ gyürü fölötti modulus, akkor a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(M, N)$ jelölést használjuk az $M \rightarrow N$ $\mathcal{R}$ -lineáris leképezések alkotta $\mathcal{R}$ -modulusra.

19. definíció. A ∇ lineáris konnexió görbületi formáján az

$$\widetilde{R}: \mathcal{H}(B)\times\mathcal{H}(B) \longrightarrow Hom_{C^\infty(B)}(Sec\,\xi, Sec\,\xi),$$
$$(X,Y) \longmapsto \widetilde{R}(X,Y) \doteq \nabla_X\circ\nabla_Y - \nabla_Y\circ\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

leképezést értjük.

Megjegyzések.

1/ Ellenőrzésre szorul, hogy $\widetilde{R}(X,Y): Sec\,\xi \longrightarrow Sec\,\xi$ valóban $C^\infty(B)$ -lineáris leképezés. - A 25. állítás következményére - IV. formula - tekintettel az additivitás nyilvánvaló, míg a I. összefüggés ismételt alkalmazásával tetszőleges $f\in C^\infty(B)$, $\sigma\in Sec\,\xi$ esetén

$$\underline{[\widetilde{R}(X,Y)](f\sigma)} \doteq (\nabla_X\circ\nabla_Y - \nabla_Y\circ\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(f\sigma) = \nabla_X[(Yf)\sigma + f\nabla_Y\sigma] -$$
$$-\nabla_Y[(Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma] - ([X,Y]f)\sigma - f\nabla_{[X,Y]}\sigma = [X(Yf)]\sigma + (Yf)\nabla_X\sigma +$$
$$+ (Xf)\nabla_Y\sigma + f\nabla_X(\nabla_Y\sigma) - [Y(Xf)]\sigma - (Xf)\nabla_Y\sigma - (Yf)\nabla_X\sigma - f\nabla_Y(\nabla_X\sigma) -$$
$$-[X(Yf)]\sigma + [Y(Xf)]\sigma - f\nabla_{[X,Y]}\sigma = f\nabla_X(\nabla_Y\sigma) - f\nabla_Y(\nabla_X\sigma) -$$
$$- f\nabla_{[X,Y]}\sigma = \underline{f[\widetilde{R}(X,Y)(\sigma)]}$$

adódik, ami a $C^\infty(B)$ -homogenitást mutatja.

2/ Fogalomalkotásunkkal kapcsolatban fölvetődik két további kérdés is. Ezek közül az első: jogos-e $\widetilde{R}$ -ra a forma szó használata? A második /és az érdekesebb/: mi a kapcsolat a ∇ -t származtató horizontális leképezés görbületi tenzormezője /ld. 12. definíció/ és az imént értelmezett "görbületi forma" között? - A választ a következő két állítás adja meg.

27. állítás Lineáris konnexió görbületi formája L_ξ -értékű 2-forma.

Bizonyitás. Az un. lokalizációs izomorfizmusra vonatkozó tétel szerint /ld. [GHV], Vol.I., p. 79./
$\mathrm{Hom}_{C^\infty(B)}(\mathrm{Sec}\,\xi, \mathrm{Sec}\,\xi) \cong \mathrm{Sec}\,L_\xi$. Az értelmezés és a 25. állitás következménye folytán világos, hogy $\widetilde{R}$ ferde-szimmetrikus bilineáris leképezés, tehát $\widetilde{R} \in A^2_B(\mathcal{H}(B), \mathrm{Sec}\,L_\xi)$. Azonban az I./3.3. szakaszban mondottak szerint

$$A^2_B(\mathcal{H}(B), \mathrm{Sec}\,L_\xi) \cong A^2(B, L_\xi),$$

amivel állitásunkat igazoltuk.⊜

28. állitás Legyen a homogenitási feltételnek eleget tevő

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V\xi \arrow[r, "i"] & \tau_E \arrow[r, "d\pi"] & \pi^*(\tau_B) \arrow[l, dashed, bend left, "\mathcal{H}"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

horizontális leképezés görbületi tenzormezője R, a hozzá-tartozó lineáris konnexió görbületi formája $\widetilde{R}$. - R és $\widetilde{R}$ kapcsolatát az

$$\underline{\alpha \circ R(X^h, Y^h) \circ \sigma = [\widetilde{R}(X,Y)](\sigma)}$$

összefüggés adja, ahol $\alpha : V\xi \to \xi$ a kanonikus leképezés; $X, Y \in \mathcal{H}(B)$, $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi$ tetszőleges.

Diagramon:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "{[\widetilde{R}(X,Y)](\sigma)}"'] & E \arrow[d, "{R(X^h,Y^h)}"] \\ E & VE \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Bizonyitás. Egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet alapulvétele után a szokásos koordinátákban elvégzett direkt számolással igazoljuk az állitást. - Legyen σ tetszőleges $\mathcal{U}$ fölötti metszet; $e_1, \dots, e_r$ a standard koordinátarendszer által indukált $\mathcal{U}$ fölötti keretezés ξ számára. Ekkor $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ irható, ahol $\sigma^\alpha : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények.

1. Meghatározzuk $\underline{\left(\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)\sigma}$ lokális alakját.

a/ A kovariáns deriválás alaptulajdonságait összegző I.-IV. szabályok és a 26.b/ állitás ismételt alkalmazásával

$$\underline{\nabla_X \circ \nabla_Y}\,(\sigma) = \nabla_X\left[Y^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{i\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha\right] =$$

$$= \left[X\left(Y^j\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^\alpha_{j\beta}\sigma^\beta\right)\right]e_\alpha +$$

$$+ \left(Y^j\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^\alpha_{j\beta}\sigma^\beta\right)\nabla_X e_\alpha =$$

$$= X^i\left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + Y^j\frac{\partial^2\sigma^\alpha}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\Gamma^\alpha_{j\beta}\sigma^\beta + Y^j\frac{\partial\Gamma^\alpha_{j\beta}}{\partial x^i}\sigma^\beta +\right.$$

$$\left.+ Y^j\Gamma^\alpha_{j\beta}\frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^i}\right)e_\alpha + \left(Y^j\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + Y^j\Gamma^\delta_{j\beta}\sigma^\beta\right)X^i\Gamma^\alpha_{i\delta}e_\alpha =$$

$$= X^iY^j\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{j\beta}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{i\delta}\Gamma^\delta_{j\beta}\right)\sigma^\beta e_\alpha +$$

$$+ X^iY^j\left(\frac{\partial^2\sigma^\alpha}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^i}\Gamma^\alpha_{j\beta} + \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^j}\Gamma^\alpha_{i\beta}\right)e_\alpha +$$

$$+ X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{j\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha .$$

A most látottakkal megegyező módon adódik

b/ $$\underline{\nabla_Y \circ \nabla_X}\,(\sigma) = X^iY^j\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{i\beta}}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{j\delta}\Gamma^\delta_{i\beta}\right)\sigma^\beta e_\alpha +$$

$$+ X^iY^j\left(\frac{\partial^2\sigma^\alpha}{\partial x^j\partial x^i} + \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^j}\Gamma^\alpha_{i\beta} + \frac{\partial\sigma^\beta}{\partial x^i}\Gamma^\alpha_{j\beta}\right)e_\alpha +$$

$$+ \frac{\partial X^i}{\partial x^j}Y^j\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{i\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha$$

és

c/ $$\underline{\nabla_{[X,Y]}}\,(\sigma) = \nabla_{X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\sigma - \nabla_{Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}}\sigma =$$

$$= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\sigma^\alpha e_\alpha) - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\sigma^\alpha e_\alpha) =$$

$$= X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^j} + \Gamma^\alpha_{j\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{i\beta}\sigma^\beta\right)e_\alpha .$$

a/.-b/.-c/ egybevetésével kapjuk:

$$\left(\nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(\sigma) =$$
$$= X^i Y^j \left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\beta}}{\partial x^j} + \Gamma^{\alpha}_{i\delta} \Gamma^{\delta}_{j\beta} - \Gamma^{\alpha}_{j\delta} \Gamma^{\delta}_{i\beta} \right) \sigma^\beta e_\alpha =$$
$$\doteq X^i Y^j \widetilde{R}^{\ \alpha}_{i\ j\beta} \sigma^\beta e_\alpha ,$$

ahol

$$\widetilde{R}^{\ \alpha}_{i\ j\beta} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i,j = 1,\dots,n;\ \alpha,\beta = 1,\dots,r)$$

a görbületi forma <u>komponensfüggvényei</u>.

2. A 17. állításból következően

$$R(X^h, Y^h) = (X^i Y^j \circ \pi)\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^i} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^j} + \Gamma^{\delta}_{j} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^{n+\delta}} - \Gamma^{\delta}_{i} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^{n+\delta}} \right) \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} .$$

Itt a 24.b/ állítás szerint $\Gamma^{\alpha}_{j} = y^{n+\beta}\left(\Gamma^{\alpha}_{j\beta} \circ \pi\right)$,

amiből

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^i} = y^{n+\beta} \frac{\partial\left(\Gamma^{\alpha}_{j\beta} \circ \pi\right)}{\partial y^i} = y^{n+\beta}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^k} \circ \pi \right) \frac{\partial (x^k \circ \pi)}{\partial y^i} =$$
$$= y^{n+\beta}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^k} \circ \pi \right) \delta^k_i = y^{n+\beta}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^i} \circ \pi \right),$$

s hasonlóképpen $\dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^j} = y^{n+\beta}\left(\dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\beta}}{\partial x^j} \circ \pi \right)$; míg

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i}}{\partial y^{n+\delta}} = \delta^\beta_\delta \left(\Gamma^{\alpha}_{i\beta} \circ \pi\right) + y^{n+\beta}\left(\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\beta}}{\partial x^k} \circ \pi \right) \frac{\partial (x^k \circ \pi)}{\partial y^{n+\delta}} = \Gamma^{\alpha}_{i\delta} \circ \pi$$

és ugyanígy $\dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j}}{\partial y^{n+\delta}} = \Gamma^{\alpha}_{j\delta} \circ \pi$.

Mindezek alapján

$$R(X^h, Y^h) = (X^i Y^j \circ \pi) y^{n+\beta} \left[\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^i} \circ \pi - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\beta}}{\partial x^j} \circ \pi + \right.$$
$$\left. + \left(\Gamma^{\alpha}_{i\delta} \circ \pi\right)\left(\Gamma^{\delta}_{j\beta} \circ \pi\right) - \left(\Gamma^{\alpha}_{j\delta} \circ \pi\right)\left(\Gamma^{\delta}_{i\beta} \circ \pi\right) \right] \frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}} .$$

E vektormezőnek a $\sigma(x) \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ pontban fölvett értéke

$$[R(X^h,Y^h)](\sigma(x)) = X^i(x)Y^j(x)y^{n+\beta}[\sigma(x)]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{j\beta}}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{i\beta}}{\partial x^j}(x) + \Gamma^{\alpha}_{i\delta}(x)\Gamma^{\delta}_{j\beta}(x) - \Gamma^{\alpha}_{j\delta}(x)\Gamma^{\delta}_{i\beta}(x)\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\sigma(x)} =$$

$$= \left(X^iY^j\sigma^\beta\tilde{R}^{\ \alpha}_{ij\ \beta}\right)(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\sigma(x)} \in T_{\sigma(x)}(F_x).$$

Mivel a 12. állitás bizonyitásában látottak szerint

$$\alpha_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_z = e_\alpha(x) \quad (x = \pi(z);\ \alpha = 1,\dots,r),$$

következik, hogy

$$\alpha_{\sigma(x)}\left[R(X^h,Y^h)(\sigma(x))\right] = \left(X^iY^j\tilde{R}^{\ \alpha}_{ij\ \beta}\sigma^\beta\right)(x)e_\alpha(x) =$$

$$= \left[\left(\tilde{R}(X,Y)\right)(\sigma)\right](x);$$

tehát

$$\alpha\circ R(X^h,Y^h)\circ\sigma = [\tilde{R}(X,Y)](\sigma). \quad ▨$$

<u>Következmény</u>. Legyen a homogenitási feltételt teljesitő

$$0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{\ i\ } \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$$

horizontális leképezéshez tartozó konnexióleképezés $\mathcal{K}$, az általa származtatott lineáris konnexió görbületi formája $\tilde{R}$. Akkor $\forall\ \sigma\in \mathrm{Sec}\,\xi,\ X,Y\in\mathfrak{X}(B)$:

$$\mathcal{K}\circ[X^h,Y^h]\circ\sigma = -[\tilde{R}(X,Y)](\sigma);$$

diagramon

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "{-[\tilde{R}(X,Y)](\sigma)}"'] & E \arrow[d, "{[X^h,Y^h]}"] \\ E & TE \arrow[l, "\mathcal{K}"] \end{tikzcd}$$

<u>Bizonyitás</u>. A tett kijelentés 19. állitás figyelembevételével nyilvánvaló. ⊘

<u>Megjegyzés</u>. A most nyert eredmény jelenti DOMBROWSKI /1962/, /23/ formula vektornyalábokra való közvetlen általánositását; v.ö. ezt a 19. állitást követő megjegyzéssel!

—— . ——

A "clever observation" messzeható következményei láttán fölvetődik a kérdés: a feltételek milyen gyöngitésével érhetnénk el, hogy a horizontális leképezés homogenitása <u>ne</u> implikáljon automatikusan linearitást? A válasz - éppen az ominózus 9. lemma fölidézésével - meglehetősen egyszerü: a nullmetszeten való differenciálhatóságtól "megszabadulva" juthatunk nagyobb általánossághoz. - E helyen ilymódon szükségképpen sort kell keriteni a differenciálhatóság feltételének arra az enyhitésére, amelyet az I.<u>2.1</u>. szakaszban helyeztünk kilátásba. Ez azonban megfogalmazásainkban bizonyos kényelmetlenségekhez vezet, mert eddig használt terminusaink kivétel nélkül a mindenütt való differenciálhatóság előlegzéséhez kötődtek. A tulzott és tulajdonképpen indokolatlan komplikációk elkerülése végett e terminusokat /kellő óvatossággal/ mégis megtartjuk, a változatlanul nevezett fogalmakat - többnyire hallgatólagosan - a gyöngitett differenciálhatósági előirás mellett értve. Ugy véljük, ez nem fog félreértéseket okozni.

Az elgondolás pontos kivitelezéséhez szükségünk lesz az un. "hasitott nyaláb" fogalmára, ennek konstrukcióját a soronkövetkező lemmában adjuk. Horizontális leképezés szerepeltetése helyett a jelen szituációban technikailag egyszerűbbnek tűnik, ha a 16.b/ állítás alkalmazásával majdnem--szorzat strukturából indulunk ki /illetve - az iménti terminológiai megállapodásra tekintettel - lényegében abból/. A homogenitási feltétel formába öntésére a 2. tétel nyujtotta számos alternativa közül a tenzió-tenzormező segitségével megfogalmazhatót választjuk.

10. lemma Legyen $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb.

a/ Ha $\sigma : B \longrightarrow E$ a nullmetszet, akkor (B, σ) zárt részsokasága E -nek.

b/ Amennyiben

$\dot{F} = F \setminus \{\sigma\}$, $\dot{F}_x = F_x \setminus \{0_x\}$ $(x \in B)$ és $\dot{E} \doteq \bigcup_{x \in B} \dot{F}_x$,

ugy $\dot{E}$ nyilt részsokasága E -nek és $\dot{\xi} \doteq (\dot{E}, \dot{\pi}, B, \dot{F})$ - ahol $\dot{\pi} \doteq \pi|_{\dot{E}}$ - fibrált nyaláb, amelyet hasitott /"slit"/ nyalábnak hivunk.

Bizonyitás. Ld. pl. [GHV], Vol.I., p. 104. ⊘

20. definició Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb, továbbá egy olyan $P : TE \longrightarrow TE$ leképezés, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

1° $\forall\, a, b \in TE : \pi_E(a) = \pi_E(b) \Longrightarrow \pi_E[P(a)] = \pi_E[P(b)]$

/fibrumtartás; π_E τ_E projekciója/;

2° P differenciálható a $\dot{\tau}_E$ hasitott nyaláb totálterén;

3° $P^2 = \iota_{\tau_E}$;

4° a $P_z \doteq P|_{T_z(E)} : T_z(E) \longrightarrow T_z(E)$

lineáris transzformációk -1 sajátértéknek megfelelő sajátalterei a vertikális alterek.

Tekintsük a P -hez tartozó

$$h \doteq \frac{1}{2}(P + \iota_{\tau_E}) : TE \longrightarrow TE$$

horizontális projekció által meghatározott $\mathcal{H}$ horizontális leképezést! - Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{H}$ eleget tesz a homogenitási feltételnek, ha $\mathcal{T}$ tenzió-tenzormezője a bázissokaság minden vektormezőjének h általi liftjéhez σ -t rendel: $\forall\ X \in \mathfrak{X}(B) : \mathcal{T}(X^h) = \sigma$. Ilyen esetben a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó általános konnexiót nemlineáris konnexiónak nevezzük.

Megjegyzések.

1/ Terminológiai megállapodásunk alapján szólhattunk volna az értelmezésben olyan P nyalábleképezésről, amelyre 2^o-4^o teljesül vagy akár olyan majdnem-szorzat strukturáról, amelynél a differenciálhatóság csak $\dot{\tau}_E$ fölött van megkövetelve. E lehetőségekkel azért nem éltünk a definíció első felében, hogy a különbséget világosabban értékeltessük.

2/ P -t a 14. állitás bizonyitásában leirt egyik interpretáció szellemében E -n adott τ_E -értékü 1 -formának is tekinthetjük; ekkor 2^o helyett a $z \in \dot{E} \longmapsto P_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$ leképezés differenciálhatósága irandó elő. Amennyiben P -t a szóbanforgó helyen található másik interpretációnak megfelelően E fölötti $(1,1)$ -tenzormezőnek fogjuk föl, ugy a 2^o feltétel e tenzormező $\dot{E}$ fölötti /szokásos/ differenciálhatóságát jelenti. - Bárhogyan szemléljük is a dolgot, lokálisan a 16. állitást követő 1/ megjegyzés szerint leszármaztatott Γ^{α}_{i} konnexióparaméterek $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap \dot{E}$ fölötti differenciálhatóságához jutunk, ahol $\mathcal{U} \subset B$ alkalmas trivializáló környezet. Tüstént adódik igy, hogy jelen esetben a h horizontális projekció differenciálhatósága $T\dot{E}$ fölött, a $\mathcal{T}$ tenzió-tenzormező differenciálhatósága pedig $\mathfrak{X}(\dot{E})$ -on van biztositva.

3/ A h által meghatározott $\mathcal{H}$ horizontális leképezéshez most is a 7.c/ állitás segitségével jutunk. Mivel $\mathcal{H}$ -t lokálisan nyilván az előbb emlitett Γ_i^α függvények irják le, az Euler-tétel /22. állitás/ alapján közvetlenül nyerhető a

<u>29. állitás</u> Nemlineáris konnexiót származtató horizontális leképezés konnexióparaméterei elsőrendben homogén függvények a trivializáló környezetek projekció-inverzeinek $\dot{E}$ -tal való metszetein.

<u>Megjegyzések</u>.

1/ Nem jelent lényeges megszoritást, ha előirjuk, hogy tetszőleges $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet esetén a konnexióparaméterek $(E \setminus \dot{E}) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U})$ fölött tünjenek el. Ekkor a konnexióparaméterek elsőrendben homogének lesznek $\mathcal{U}$ <u>teljes</u> projekcióinverzén. Fölvetődik azonban a kérdés: létezik-e egyáltalán olyan $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ elsőrendben homogén függvény, amely $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fölött differenciálható, a 0 pontban azonban <u>nem</u>? Erre <u>igenlő</u> a válasz; egy példa:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u^1, \ldots, u^n) \longmapsto f(u^1, \ldots, u^n) := \begin{cases} 0, \text{ ha } u^1 = \ldots = u^n = 0; \\ \dfrac{(u^1)^3}{(u^1)^2 + \ldots + (u^n)^2}, \text{ ha } (u^1)^2 + \ldots + (u^n)^2 > 0 \end{cases}$$

$$(n > 1 \in \mathbb{N}).$$

Ezzel egyszersmind azt is beláttuk, hogy a vázolt eljárás ténylegesen biztositja a linearitás elkerülését.

2/ Nemlineáris konnexióról szólva a következőkben mindig előfeltételezzük a differenciálhatósági előirások mondott enyhitését, vagyis - anélkül, hogy külön jeleznénk - a 20. definicióban körvonalazott szituációból indulunk ki.

30. állitás. Ha ∇ nemlineáris konnexió, akkor a

$\nabla : \mathrm{Sec}\,\xi \longrightarrow A^1(B;\xi)$ leképezésre teljesül a

$\nabla(f\sigma) = (df)\sigma + f\nabla\sigma \quad (f\in C^\infty(B),\ \sigma\in \mathrm{Sec}\,\xi)$

összefüggés.

Bizonyitás. A 25. állitás korolláriumát követő 1/ megjegyzésben már rámutattunk arra, hogy a szóbanforgó tulajdonság a "clever observation" eredményétől függetlenül igaz. ▨

Következmény. Nemlineáris konnexióhoz tartozó kovariáns deriválásokra az alábbi szabályok érvényesek:

I. $\nabla_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + f\nabla_X\sigma$;

II. $\nabla_{X+Y}(\sigma) = \nabla_X\sigma + \nabla_Y\sigma$;

III. $\nabla_{fX}(\sigma) = f\nabla_X\sigma$

$(X, Y\in \mathfrak{X}(B),\ \sigma\in \mathrm{Sec}\,\xi,\ f\in C^\infty(B)$ tetsz.$)$. ▨

Megjegyzés. Összevetve a nyert eredményt a 25. állitás korolláriuma utáni 4/ megjegyzéssel, világossá válik, hogy a 20. definicióban bevezetett nemlineáris konnexió általánosabb a KANDATU-félénél. Csatlakoznunk kell ilymódon WONG-MOK /1976/, p. 163. - más meggondolással adódó s a $\xi = \tau_B$ esetre tett - azon észrevételéhez, miszerint [YaI], p. 214. e szituációval kapcsolatban hibás kijelentéssel él. - Az itt csak jelzésszerüen ismertetett nemlineáris konnexió a BARTHEL /1963/ - félének a megfelelője tetszőleges vektornyaláb esetében, annyi eltéréssel, hogy BARTHEL pozitiv homogenitást kiván meg.

9. Alkalmazások tenzornyalábra

Előzetes megjegyzések

1/ Emlékeztetünk rá, hogy - az I.2.4.-ben mondottaknak megfelelően - tenzornyalábon közös bázisterü ξ és η vektornyaláb tenzori szorzatát értjük. Igy valójában csak egy nagyon speciális tipusu tenzornyalábot teszünk vizsgálat tárgyává - de ez a speciális eset is kellőképpen reprezentativ lesz.

2/ Meggondolásaink során többször - s minden további kommentár nélkül - föl fogjuk használni azt a tényt, hogy ha ξ és η közös B bázisterü vektornyaláb, akkor a $Sec\,\xi \otimes_B Sec\,\eta$ és a $Sec(\xi\otimes\eta)$ $C^\infty(B)$ -modulus izomorf egymással, mégpedig a

$$\mathcal{T}:\ Sec\,\xi\otimes_B Sec\,\eta \longrightarrow Sec(\xi\otimes\eta),$$

$$\sigma\otimes\tau \longmapsto \mathcal{T}(\sigma\otimes\tau);\ \left[\mathcal{T}(\sigma\otimes\tau)\right](x) \doteq \sigma(x)\otimes\tau(x)$$

leképezés egy alkalmas izomorfizmus közöttük. Ennek bizonyitását illetően a [GHV] monográfiára utalunk /Vol.I., p.80./.

3/ A $Sec(\xi\otimes\eta) \cong Sec\,\xi\otimes_B Sec\,\eta$ $C^\infty(B)$ -modulus $\sigma\otimes\tau$ alakban előálló elemeit dekomponálhatóknak mondjuk s ezek halmazára a $Sec_d(\xi\otimes\eta)$ jelölést használjuk. /Természetesen $Sec_d(\xi\otimes\eta)$ nem részmodulusa $Sec(\xi\otimes\eta)$ -nak!/ - Az I.12. állitás és a 3. lemma alapján közvetlenül adódik az az alábbiakban szintén lépten-nyomon alkalmazásra kerülő észrevétel, miszerint ha $\{y^i, t^{\alpha\lambda}\}$ a $\xi\otimes\eta$ tenzornyaláb egy standard koordinátarendszere az $\mathcal{U}\subset B$ trivializáló környezet projekció-inverzén, ugy az általa indukált $\mathcal{U}$ fölötti keretezést <u>dekomponálható metszetek</u> alkotják.

4/ Mivel a tenzornyaláb speciális vektornyaláb, a megelőző 8 alfejezetben nyert összes eredmény automatikusan érvényes ennek alapulvétele mellett is. E specializációk teljes részletességü elvégzése fölösleges volna, soronkövetkező meggondolásainkban elsősorban olyan tényekre igyekszünk majd rámutatni, amelyek a tenzori-szorzat struktura sajátos természetéből eredeztethetők. - A kiinduló értelmezés egyszerü"forditás" a vektornyaláb-nyelvről a tenzornyaláb-nyelvre:

<u>21. definició</u> <u>Tenzornyalábon</u> adott horizontális leképezés által indukált általános, nemlineáris ill. lineáris konnexiót általános, nemlineáris ill. lineáris <u>tenzori konnexiónak</u> nevezünk.

<u>Megjegyzés</u>. A tenzori konnexió fogalmát E.BOMPIANI vezette be, τ_B -ből és τ_B^* -ből képzett tenzornyaláb alapulvételével s lokális eszközökkel: a "In 1946, I introduced in two papers two new ideas in the field of connections. Given a tensor field of any kind one may ask if there are linear combinations of the tensor komponents and of their derivatives which are also components of a tensor, the coefficients of such combinations define a <u>tensor connection</u>." /BOMPIANI /1976/./ - A most idézett cikk irodalomjegyzékében a tárgykörrel kapcsolatos - bár kizárólag olasz kutatóktól származó és olasz nyelvü - dolgozatok tekintélyes listája van fölsorakoztatva, a szerző azon kifejezett reményében, hogy e munkák ujabb vizsgálatokat inspirálnak majd.

Már többször utaltunk arra, hogy egy-egy fontosnak, érdekesnek bizonyuló gondolatnál a "prioritás" kiderítése mennyire nehéz, gyakran szinte lehetetlen. A történeti hűséghez itt is hozzátartozik - mint arra TAMÁSSY /1963/ rámutatott -, hogy a BOMPIANI által fölvetetthez hasonló kérdéseket - igaz, némileg eltérő módon - már HOKARI /1934/ tárgyalt.

A mi értelmezésünk e "tenzori konnexiót" egy fogalmi szempontból nagyon is indokolt általánosabb formában s egyben "homogenitási fokozatok szerinti distinkciókkal" beleilleszti az előzőek során kifejtett modern, globális konnexióelméletbe. Dolgozatunk egyik fő célja éppen a klasszikusnak a modernbe való e "beágyazása" volt s hogy célunkat csakugyan elértük, a lokális leirás megadásával tüstént világossá fog válni, ez ugyanis lehetővé teszi fogalomalkotásaink és eredményeink közvetlen összevetését a klasszikus elmélet megfelelő tényeivel. - A lokális leirást alapozza meg a 8. és 20. állitás mintájára közvetlenül adódó

31. állitás Legyen adva az r -ill. s -rangu $\xi^1 = (E^1, \pi^1, B, F^1)$ és $\xi^2 = (E^2, \pi^2, B, F^2)$ vektornyaláb tenzori szorzataként előálló $\xi = (E, \pi, B, F^1 \otimes F^2)$ tenzornyaláb. Megtartva az I.2.5. szakasz jelöléseit, tekintsük az $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekcióinverzén az $\{y^i ; t^{\alpha\lambda}\}$ $(i = 1, \dots, n ; \alpha = 1, \dots, r ; \lambda = 1, \dots, s)$ standard koordinátarendszert.

a/ ξ -n adott minden $\mathcal{H}$ horizontális leképezéshez egyértelmüen megadhatók olyan $\Gamma^{\alpha\lambda}_{i} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények - a <u>konnexióparaméterek</u>-, hogy tetszőleges $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ esetén $\mathcal{H}_{\pi(z)}$ szokásos bázisokra vonatkozó matrixa az

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} n \\ \\ rs \end{array}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \\
 & & -\Gamma^{\alpha\lambda}_{i}(z) & &
\end{array}\right] \\
n
\end{array}
$$

alaku, $(n+rs)\times n$ tipusu matrix.

b/ Ha ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált általános konnexió és $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ a bázissokaság tetszőleges, $\mathcal{U}$ fölötti vektormezője, továbbá σ ill. τ egy-egy $\mathcal{U}$ fölötti metszete ξ^1 -nek ill. ξ^2 -nek, akkor

$$\underline{\nabla_X(\sigma\otimes\tau) = X^i\left[\frac{\partial(\sigma^\alpha\tau^\lambda)}{\partial x^i} + \Gamma^{\alpha\lambda}_{i}\cdot(\sigma\otimes\tau)\right]e_\alpha\otimes f_\lambda}\ ,$$

ahol az $e_\alpha\otimes f_\lambda : \mathcal{U}\longrightarrow\pi^{-1}(\mathcal{U})$ metszetek a standard koordinátarendszer által indukált $\mathcal{U}$ fölötti keretezését alkotják ξ -nek.

<u>Megjegyzés</u>. Az állitás b/ részében a $\sigma\otimes\tau\in Sec_d(\xi^1\otimes\xi^2)|_{\mathcal{U}}$ dekomponálható metszet helyett természetesen tetszőleges $\mathcal{U}$ fölötti metszet is szerepelhet, nevezetesen: ha $t = t^{\alpha\lambda}e_\alpha\otimes f_\lambda\in Sec(\xi^1\otimes\xi^2)|_{\mathcal{U}}$ akkor,

$$\nabla_X t = X^i\left(\frac{\partial t^{\alpha\lambda}}{\partial x^i} + \Gamma^{\alpha\lambda}_{i}\cdot t\right)e_\alpha\otimes f_\lambda .$$

<u>32. állitás</u>. Egy horizontális leképezés aszerint indukál lineáris ill. nemlineáris tenzori konnexiót, amint konnexióparaméterei elsőrendben homogén és $\pi^{-1}(\mathcal{U})$

ill. $\pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\dot{E}$ fölött differenciálható függvények. Nevezetesen: lineáris tenzori konnexió esetén a konnexióparaméterek $\underline{\Gamma'^{\alpha\lambda}_{i} = t^{\beta\mu}(\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\circ\pi)}$ alakuak, ahol $\underline{\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} : \mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}}$ $(\alpha,\beta=1,\dots,r;\ \lambda,\mu=1,\dots,s;\ i=1,\dots,n)$ differenciálható függvények, $t^{\beta\mu}$ koordinátafüggvények, míg nemlineáris tenzori konnexió esetén olyan

$\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} : \pi^{-1}(\mathcal{U})\longrightarrow\mathbb{R}$ $\pi^{-1}(\mathcal{U})\cap\dot{E}$ fölött differenciálható függvények adhatók meg, amelyekre $\underline{\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}t^{\beta\mu} = \Gamma'^{\alpha\lambda}_{i}}$ teljesül. Ilymódon a lineáris tenzori konnexióhoz tartozó kovariáns deriváltak

$$\underline{\nabla_X(\sigma\otimes\tau) = X^i\left[\frac{\partial(\sigma^\alpha\tau^\lambda)}{\partial x^i} + \Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\sigma^\beta\tau^\mu\right]e_\alpha\otimes f_\lambda}$$

alakuak, nemlineáris tenzori konnexió esetén pedig

$$\nabla_X(\sigma\otimes\tau) = X^i\left[\frac{\partial(\sigma^\alpha\tau^\lambda)}{\partial x^i} + \left(\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\circ\sigma\otimes\tau\right)\sigma^\beta\tau^\mu\right]e_\alpha\otimes f_\lambda$$

a kovariáns deriváltak alakja.

<u>Bizonyitás</u>. A konnexió lineáris ill. nemlineáris voltának a konnexióparaméterekben való tükröződésére vonatkozó kijelentés világos a 2. tétel /$\underline{1}$.$\Leftrightarrow$ $\underline{5}$. ekvivalencia/ és a 29. állitás valamint az ezt követő 1/ megjegyzés alapján, a konnexióparaméterek alakjával kapcsolatban mondottak pedig a lineáris esetben a 24.b/ állitás, a nemlineáris esetben az Euler-tétel alapján következnek. A kovariáns deriváltak lokális előállitásához az az észrevétel vezet, hogy az alfejezetünk elején tett 3/ előzetes megjegyzés figyelembevételével tetszőleges $x\in B$ -re a lineáris esetben

$$\left(\Gamma_i^{\alpha\lambda} \circ \sigma\otimes\tau\right)(x) = \left[t^{\beta\mu}\left(\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \pi\right)\circ(\sigma\otimes\tau)\right](x) =$$

$$= t^{\beta\mu}\left[(\sigma\otimes\tau)(x)\right]\left(\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \pi\right)\left[(\sigma\otimes\tau)(x)\right] =$$

$$= \sigma^\beta\tau^\mu\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}(x),$$

a nemlineáris esetben pedig

$$\left(\Gamma_i^{\alpha\lambda} \circ \sigma\otimes\tau\right)(x) = \left[\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\, t^{\beta\mu} \circ (\sigma\otimes\tau)\right](x) =$$

$$= t^{\beta\mu}\left[(\sigma\otimes\tau)(x)\right]\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\left[(\sigma\otimes\tau)(x)\right] =$$

$$= \left(\sigma^\beta\tau^\mu\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \sigma\otimes\tau\right)(x).$$ ▨

Megjegyzés. A kovariáns deriváltak fölirásánál most sem szükséges dekomponálható metszetekre szoritkozni!

—— • ——

Az eddig elmondottak és az 1.tétel alapján közvetlenül következik a

33. állitás A $\xi^1\otimes\xi^2 = (E, \pi, B, F^1\otimes F^2)$ rs -rangu tenzornyalábon adott $\mathcal{H}$ horizontális leképezés görbületi tenzormezője lokálisan az

$$\mathcal{R}(X,Y) = X^iY^j\mathcal{R}_i{}^{\alpha\lambda}{}_j \frac{\partial}{\partial t^{\alpha\lambda}}$$

formula szerint hat, ahol

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{és} \quad Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

az alapulvett $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet fölötti vektormezők, az

$$\mathcal{R}_i{}^{\alpha\lambda}{}_j : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R},\ z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longmapsto \mathcal{R}_i{}^{\alpha\lambda}{}_j(z),$$

$$\mathcal{R}_i{}^{\alpha\lambda}{}_j(z) := \left(\frac{\partial\Gamma_j^{\alpha\lambda}}{\partial y^i} - \frac{\partial\Gamma_i^{\alpha\lambda}}{\partial y^j} + \Gamma_j^{\beta\vartheta}\frac{\partial\Gamma_i^{\alpha\lambda}}{\partial t^{\beta\vartheta}} - \Gamma_i^{\beta\vartheta}\frac{\partial\Gamma_j^{\alpha\lambda}}{\partial t^{\beta\vartheta}}\right)(z)$$

függvények pedig $\mathcal{R}$ komponensfüggvényei. Speciálisan nemlineáris ill. lineáris konnexió esetén a komponensfüggvények alakja

$$R_{ij\ \beta\mu}^{\ \ \alpha\lambda} = \left(\frac{\partial \gamma_j{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}}{\partial y^i} - \frac{\partial \gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}}{\partial y^j} + \gamma_j{}^{\delta\varrho}{}_{\beta\mu}\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\delta\varrho} - \right.$$

$$\left. - \gamma_i{}^{\delta\varrho}{}_{\beta\mu}\gamma_j{}^{\alpha\lambda}{}_{\delta\varrho} \right) t^{\beta\mu}$$

ill.

$$R_{ij\ \beta\mu}^{\ \ \alpha\lambda} = \left[\frac{\partial \Gamma_j{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}}{\partial x^i}\cdot\pi - \frac{\partial \Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}}{\partial x^j}\cdot\pi + \left(\Gamma_j{}^{\delta\varrho}{}_{\beta\mu}\cdot\pi\right)\left(\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\delta\varrho}\cdot\pi\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\Gamma_i{}^{\delta\varrho}{}_{\beta\mu}\cdot\pi\right)\left(\Gamma_j{}^{\alpha\lambda}{}_{\delta\varrho}\cdot\pi\right)\right] t^{\beta\mu}.$$

$\mathcal{H}$ <u>integrálhatóságának</u> kritériumát az általános esetben lokálisan az

$$\underline{R_i{}^{\alpha\lambda}{}_j = 0} \quad (\alpha = 1,\dots,r;\ \lambda = 1,\dots,s;\ i,j = 1,\dots,n)$$

feltétel adja.

<u>Megjegyzés</u>. <u>Nemlineáris</u> tenzori konnexió görbületével kapcsolatban – a $\xi^1 = \xi^2 \div \tau_B$ nyalábok alapulvétele mellett – TAMÁSSY-TU /1975/ tartalmaz ujabbkeletü, érdekes lokális vizsgálatokat. E dolgozat /5/ formulájának pontos megfelelője a görbületi tenzormező komponensfüggvényeire – a nemlineáris esetre vonatkozóan – imént adott explicit alak.

—— . ——

A következő értelmezés általánositja s egyben globális nyelvre ülteti át a "tenzori konnexió vektori konnexiókra való <u>dekomponálódásának</u> vagy <u>redukálódásának</u>" /ld. pl. TAMÁSSY /1960/, /1969/, /1972// klasszikus fogalmát.

<u>22. definició</u> Azt mondjuk, hogy az rs -rangu

$$\xi = \xi^1 \otimes \xi^2 = (E, \pi, B, F^1 \otimes F^2)$$

/dim $F^1 = r$, dim $F^2 = s$ / tenzornyalábon adott ∇ általános konnexió <u>$Sec_{\mathcal{U}}(\xi^1 \otimes \xi^2)$ fölött dekomponálódik</u> a ξ^1 -en adott $\overset{1}{\nabla}$ és ξ^2 -n adott $\overset{2}{\nabla}$ általános konnexióra, ha

$$\forall \sigma \in Sec\,\xi^1,\ \tau \in Sec\,\xi^2:\quad \nabla(\sigma \otimes \tau) = \overset{1}{\nabla}\sigma \boxtimes \tau + \sigma \boxtimes \overset{2}{\nabla}\tau$$

ahol $\overset{1}{\nabla}\sigma \boxtimes \tau \in A^1(B;\xi)$ mégpedig $\forall x \in B,\ v \in T_x(B)$:

$$\left[(\overset{1}{\nabla}\sigma \boxtimes \tau)(x)\right](v) \doteq (\overset{1}{\nabla}\sigma)_x(v) \otimes \tau(x)$$

és $\sigma \boxtimes \overset{2}{\nabla}\tau \in A^1(B;\xi)$ értelmezése analóg.

<u>Megjegyzések</u>.

1/ A definicióban bevezetett $\boxtimes$ operációt általánosabb esetre értelmezi a [GHV] monográfia /ld. Vol.II., P.314./, ez a nagyobb általánosság azonban a mi céljainkhoz nem szükséges. - Az operáció <u>nem</u> tenzori szorzat, de tekinthető a metszetek tenzori szorzatának általánositásaként.

2/ A dekomponálhatóság értelmezése során a $Sec_{\mathcal{U}}(\xi^1 \otimes \xi^2)$ részhalmazra való szoritkozás szükségszerü, két - külön-külön is kényszeritő erejü! - okból: egyrészt az általános konnexió <u>nem</u> lineáris leképezése a metszetek halmazának $A^1(B;\xi)$ -be, másrészt a $Sec\,\xi$ $C^\infty(B)$ -modulusnak általában nincs bázisa /ennek egzisztenciája csak a $(B \times F, \pi, B, F)$ – $\pi: B \times F \to F,\ (x,y) \mapsto \pi(x,y) \doteq x$ – alaku un. <u>triviális vektornyalábok</u> esetén biztositott!/ s igy mód sincs tetszőleges metszet dekomponálhatókból való előállitására. <u>Lineáris</u> konnexió esetén azonban <u>lokálisan</u> - tehát egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet fölött - nyilván szólhatunk /és szólni is fogunk, ld. az alábbi 3. tétel b/ következményét/ a teljes $Sec(\xi^1 \otimes \xi^2)\big|_{\mathcal{U}}$ fölötti dekomponálhatóságról.

<u>3. TÉTEL.</u> Legyen $\xi = \xi^1 \otimes \xi^2$ rs -rangu, B bázisterü tenzornyaláb, $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet ξ számára.

a/ Ahhoz, hogy a ξ -n adott ∇ általános tenzori konnexió $Sec_\alpha(\xi^1 \otimes \xi^2)$ fölött dekomponálódjon a ξ^1 -en adott $\overset{1}{\nabla}$ s a ξ^2 -n adott $\overset{2}{\nabla}$ általános konnexióra, szükséges és elegendő, hogy tetszőleges $X \in \mathcal{H}(B)$ vektormező esetén

$$\underline{\nabla_X(\sigma \otimes \tau) = \overset{1}{\nabla}_X \sigma \otimes \tau + \sigma \otimes \overset{2}{\nabla}_X \tau}$$

teljesüljön.

b/ A dekomponálhatóság kritériumát lokálisan a

$$\underline{\Gamma^{\alpha\lambda}_{i} \cdot \sigma \otimes \tau = \left(\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i} \cdot \sigma\right)\tau^\lambda + \left(\overset{2}{\Gamma}{}^{\lambda}_{i} \cdot \tau\right)\sigma^\alpha}$$

összefüggés adja, ahol $\Gamma^{\alpha\lambda}_{i}, \overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i}$ és $\overset{2}{\Gamma}{}^{\lambda}_{i}$ a ∇ -t, $\overset{1}{\nabla}$ -et ill. $\overset{2}{\nabla}$ -t származtató horizontális leképezések konnexióparaméterei, a $\sigma^\alpha : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ és $\tau^\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények a $\sigma = \sigma^\alpha e_\alpha$ ill. $\tau = \tau^\lambda f_\lambda$ fölbontás által vannak értelmezve, $\{e_\alpha \otimes f_\lambda\}$ $(\alpha = 1,\dots,r;\ \lambda = 1,\dots,s)$ a standard koordinátarendszer által indukált keretezés $\mathcal{U}$ projekció-inverzén.

<u>Bizonyitás.</u>

a/ Tegyük föl, hogy dekomponálódik ∇ a $Sec_\alpha(\xi^1 \otimes \xi^2)$ fölött, azaz hogy $\forall\, \sigma \in Sec\,\xi^1,\ \tau \in Sec\,\xi^2$ esetén

$$\nabla(\sigma \otimes \tau) = \overset{1}{\nabla}\sigma \otimes \tau + \sigma \otimes \overset{2}{\nabla}\tau .$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az

$$i(X) : A^1(B; \xi^1 \otimes \xi^2) \longrightarrow Sec(\xi^1 \otimes \xi^2)$$

operátort! Ekkor a baloldal per definitionem az

$$i(X)[\nabla(\sigma \otimes \tau)] = \nabla_X(\sigma \otimes \tau)$$

alakba megy át, mig a jobboldalon tetszőleges $x \in B$ esetén

$$\left(i(X)\left[\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau\right]\right)(x) \doteq \left(\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau\right)_x\left[X(x)\right] \doteq$$
$$= \left(\overset{1}{\nabla}\sigma\right)_x\left[X(x)\right]\otimes\tau(x) = \left(\overset{1}{\nabla}_X\sigma\right)(x)\otimes\tau(x) =$$
$$= \left(\overset{1}{\nabla}_X\sigma\otimes\tau\right)(x)$$

/az utolsó előtti lépésnél az 5. lemmát, az utolsónál a 2/ előzetes megjegyzést alkalmaztuk/, következőleg

$i(X)\left(\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau\right) = \overset{1}{\nabla}_X\sigma\otimes\tau$, s ugyanigy adódik, hogy

$i(X)\left(\sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau\right) = \sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_X\tau$. Mindez az $i(X)$ operátor additivitásának figyelembevételével azt jelenti, hogy $\forall\ X\in\mathcal{H}(B)$:

$$\underline{\nabla_X(\sigma\otimes\tau) = \nabla_X\sigma\otimes\tau + \sigma\otimes\nabla_X\tau.}$$

– Megforditva, tételezzük föl ez utóbbi összefüggés teljesülését! Ekkor az $i(X)\circ\nabla = \nabla_X$ definició alapján az iménti okoskodás mellett

$$i(X)\left[\nabla(\sigma\otimes\tau)\right] = i(X)\left(\overset{1}{\nabla}\sigma\right)\otimes\tau + \sigma\otimes i(X)\overset{2}{\nabla}\tau =$$
$$= i(X)\left[\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau + \sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau\right]$$

irható. Igy

$$i(X)\left[\nabla(\sigma\otimes\tau) - \left(\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau + \sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau\right)\right] = \sigma,$$

tehát $\forall\ x\in B$:

$$\left[\nabla(\sigma\otimes\tau) - \left(\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau + \sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau\right)\right]_x\left[X(x)\right] = \sigma,$$

azaz

$$\left[\nabla(\sigma\otimes\tau) - \left(\overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau + \sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau\right)\right]_x : T_x(B)\to F_x$$

minden egyes $x\in B$ pontban a zérusleképezés. – Ebből

$$\nabla(\sigma\otimes\tau) = \overset{1}{\nabla}\sigma\boxtimes\tau + \sigma\boxtimes\overset{2}{\nabla}\tau$$

következik.

b/ Az a/-ban megadott kritérium a kovariáns deriváltak 31. állitásban szereplő alakjának figyelembevételével lokálisan az

$$X^i\left[\frac{\partial(\sigma^\alpha\tau^\lambda)}{\partial x^i}+\Gamma^{\alpha\lambda}_{i}\circ(\sigma\otimes\tau)\right]e_\alpha\otimes f_\lambda=$$

$$=X^i\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}+\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i}\circ\sigma\right)e_\alpha\otimes\tau^\lambda f_\lambda+\sigma^\alpha e_\alpha\otimes X^i\left(\frac{\partial\tau^\lambda}{\partial x^i}+\overset{2}{\Gamma}{}^{\lambda}_{i}\circ\tau\right)f_\lambda=$$

$$=X^i\left[\left(\frac{\partial\sigma^\alpha}{\partial x^i}\tau^\lambda+\frac{\partial\tau^\lambda}{\partial x^i}\sigma^\alpha\right)+\tau^\lambda\left(\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i}\circ\sigma\right)+\sigma^\alpha\left(\overset{2}{\Gamma}{}^{\lambda}_{i}\circ\tau\right)\right]e_\alpha\otimes f_\lambda$$

összefüggéshez vezet, ami akkor és csak akkor áll fönn minden $X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ $\mathcal{U}$ fölötti vektormező mellett, ha

$$\Gamma^{\alpha\lambda}_{i}\circ(\sigma\otimes\tau)=\left(\overset{1}{\Gamma}{}^{\alpha}_{i}\circ\sigma\right)\tau^\lambda+\left(\overset{2}{\Gamma}{}^{\lambda}_{i}\circ\tau\right)\sigma^\alpha.\ \circledast$$

<u>Következmény</u>

a/ ∇ <u>nemlineáris</u> tenzori konnexió ξ^1 -en ill. ξ^2 -n adott $\overset{1}{\nabla}$ ill. $\overset{2}{\nabla}$ nemlineáris konnexiókra való, $Sec_d(\xi^1\otimes\xi^2)$ fölötti dekomponálhatóságának kritériumát <u>lokálisan</u> a

$$\underline{\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}\circ(\sigma\otimes\tau)=\left(\overset{1}{\gamma}{}_i{}^{\alpha}{}_{\beta}\circ\sigma\right)\overset{(2)}{\delta}{}^{\lambda}_{\mu}+\left(\overset{2}{\gamma}{}_i{}^{\lambda}{}_{\mu}\circ\tau\right)\overset{(1)}{\delta}{}^{\alpha}_{\beta}}$$

összefüggés adja, ahol a $\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}$ függvényeket a 32. állításban leirt módon nyerjük a ∇ -t származtató horizontális leképezés konnexióparamétereiből, s hasonlóan jutunk a $\overset{1}{\gamma}{}_i{}^{\alpha}{}_{\beta}$ és $\overset{2}{\gamma}{}_i{}^{\lambda}{}_{\mu}$ függvényekhez is.

b/ ∇ <u>lineáris</u> tenzori konnexió ξ^1 -en ill. ξ^2 -n adott $\overset{1}{\nabla}$ ill. $\overset{2}{\nabla}$ lineáris konnexiókra való, <u>$Sec(\xi^1\otimes\xi^2)|_{\mathcal{U}}$ fölötti</u> dekomponálhatóságának szükséges és elegendő lokális feltétele a

$$\underline{\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}=\overset{1}{\Gamma}{}_i{}^{\alpha}{}_{\beta}\overset{(2)}{\delta}{}^{\lambda}_{\mu}+\overset{2}{\Gamma}{}_i{}^{\lambda}{}_{\mu}\overset{(1)}{\delta}{}^{\alpha}_{\beta}}$$

összefüggés teljesülése, ahol a

$$\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu},\ \overset{1}{\Gamma}{}_i{}^{\alpha}{}_{\beta},\ \overset{2}{\Gamma}{}_i{}^{\lambda}{}_{\mu}:\ \mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$$

függvények a 32. ill. a 24.b/ állitásban leirtak szerint képzendők.

Bizonyitás.

a/ A $\Gamma_i^{\alpha\lambda} = \gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} t^{\beta\mu}$, $\overset{1}{\Gamma}{}_i^{\alpha} = \overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \overset{1}{y}{}^{\beta}$ és $\overset{2}{\Gamma}{}_i^{\lambda} = \overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \overset{2}{y}{}^{\mu}$

definiáló relációk figyelembevételével a 3. tétel b/ részének kritériuma a

$$\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} t^{\beta\mu} \circ (\sigma \otimes \tau) = (\overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \overset{1}{y}{}^{\beta} \circ \sigma) \tau^{\lambda} + (\overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \overset{2}{y}{}^{\mu} \circ \tau) \sigma^{\alpha}$$

alakot ölti. Itt tetszőleges $x \in \mathcal{U}$ esetén

$$[(\overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \overset{1}{y}{}^{\beta} \circ \sigma) \tau^{\lambda}](x) = \overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} [\sigma(x)] \overset{1}{y}{}^{\beta}[\sigma(x)] \tau^{\lambda}(x) =$$

$$= \overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} [\sigma(x)] \sigma^{\beta}(x) \tau^{\lambda}(x) = [\sigma^{\beta} \tau^{\lambda} (\overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \sigma)](x),$$

hasonló módon

$$[(\overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \overset{2}{y}{}^{\mu} \circ \tau) \sigma^{\alpha}](x) = [\sigma^{\alpha} \tau^{\mu} (\overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \tau)](x)$$

és végül

$$[\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} t^{\beta\mu} \circ (\sigma \otimes \tau)](x) = \gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} [(\sigma \otimes \tau)(x)] t^{\beta\mu} [(\sigma \otimes \tau)(x)] =$$

$$= \gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} [(\sigma \otimes \tau)(x)] \sigma^{\beta}(x) \tau^{\mu}(x) =$$

$$= [\sigma^{\beta} \tau^{\mu} (\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \sigma \otimes \tau)](x),$$

igy

$$\sigma^{\beta} \tau^{\mu} (\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \sigma \otimes \tau) = \sigma^{\beta} \tau^{\lambda} (\overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \sigma) + \sigma^{\alpha} \tau^{\mu} (\overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \tau),$$

azaz

$$\gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ (\sigma \otimes \tau) = (\overset{1}{\gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \sigma) \overset{(2)}{\delta}{}^{\lambda}_{\mu} + (\overset{2}{\gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \tau) \overset{(1)}{\delta}{}^{\alpha}_{\beta}$$

következik.

b/ Lineáris konnexiók esetén

$$\Gamma_i^{\alpha\lambda} = t^{\beta\mu} (\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} \circ \tilde{\pi}), \quad \overset{1}{\Gamma}{}_i^{\alpha} = (\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \pi) \overset{1}{y}{}^{\beta},$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}_{i}^{\lambda} = \left(\overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \pi\right) \overset{2}{y}{}^{\mu} ,$$

igy akkor a dekomponálhatóság kritériuma a

$$t^{\beta\mu}\left(\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda} \circ \pi\right) \circ (\sigma \otimes \tau) = \left\{\left[\left(\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \pi\right)\overset{1}{y}{}^{\beta}\right] \circ \sigma\right\} \tau^{\lambda} +$$
$$+ \left\{\left[\left(\overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \pi\right)\overset{2}{y}{}^{\mu}\right] \circ \tau\right\} \sigma^{\alpha}$$

összefüggés fennállása. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{U}$ esetén

$$\left[t^{\beta\mu}\left(\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda} \circ \pi\right) \circ (\sigma \otimes \tau)\right](x) = t^{\beta\mu}\left[\sigma(x) \otimes \tau(x)\right] \Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda}\left[\pi\left((\sigma \otimes \tau)(x)\right)\right] =$$
$$= \sigma^{\beta}(x)\tau^{\mu}(x)\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda}(x) = \left(\sigma^{\beta}\tau^{\mu}\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda}\right)(x) ,$$

$$\left\{\left[\left(\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} \circ \pi\right)\overset{1}{y}{}^{\beta} \circ \sigma\right]\tau^{\lambda}\right\}(x) = \tau^{\lambda}(x)\overset{1}{y}{}^{\beta}\left[\sigma(x)\right]\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha}\left[\pi(\sigma(x))\right] =$$
$$= \tau^{\lambda}(x)\sigma^{\beta}(x)\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha}(x) = \left(\tau^{\lambda}\sigma^{\beta}\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha}\right)(x) ,$$

$$\left\{\left[\left(\overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda} \circ \pi\right)\overset{2}{y}{}^{\mu} \circ \tau\right]\sigma^{\alpha}\right\}(x) = \left(\sigma^{\alpha}\tau^{\mu}\overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\lambda}\right)(x) ,$$

ez az összefüggés a

$$\sigma^{\beta}\tau^{\mu}\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda} = \sigma^{\beta}\tau^{\lambda}\overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha} + \sigma^{\alpha}\tau^{\mu}\overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\lambda} ,$$

vagyis a

$$\Gamma_{i\ \beta\mu}^{\alpha\lambda} = \overset{1}{\Gamma}{}_{i\ \beta}^{\alpha}\overset{(2)}{\delta}{}_{\mu}^{\lambda} + \overset{2}{\Gamma}{}_{i\ \mu}^{\lambda}\overset{(1)}{\delta}{}_{\beta}^{\alpha}$$

alakra hozható. ▨

Megjegyzések.

1/ A lineáris konnexióra vonatkozó lokális dekomponálhatósági kritérium levezetésére más, direktebb eljárások is kínálkoznak. - Tekintve a $\xi = \xi^1 \otimes \xi^2$ nyalábnak a standard koordinátarendszer által indukált

$$e_\alpha \otimes f_\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}) \quad (\alpha = 1, \dots, r ;\ \lambda = 1, \dots, s)$$

$\mathcal{U}$ fölötti keretezését, a 26. állitás következményére való hivatkozással rendre

$$\overset{1}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} e_\beta = \overset{1}{\Gamma}{}_i{}^\alpha{}_\beta e_\alpha \ , \quad \overset{2}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f_\mu = \overset{2}{\Gamma}{}_i{}^\lambda{}_\mu f_\lambda \ , \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (e_\beta \otimes f_\mu) = \Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} e_\alpha \otimes f_\lambda$$

irható, igy a 3. tétel a/ része a

$$\Gamma_i{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu} e_\alpha \otimes f_\lambda = \overset{1}{\Gamma}{}_i{}^\alpha{}_\beta e_\alpha \otimes f_\mu + e_\beta \otimes \overset{2}{\Gamma}{}_i{}^\lambda{}_\mu f_\lambda$$

dekomponálhatósági kritériumhoz vezet, ami az imént levezetett összefüggéssel ekvivalens. - Okoskodhatunk továbbá közvetlenül a 22. definició alapján /vagyis a 3.tétel a/ részére való hivatkozás is elkerülhető/, ekkor azonban - érthetően - kicsit hosszabb számolás vezet célhoz, amelyet itt nem részletezünk.

2/ A most nyert dekomponálhatósági kritériumok némileg általánosabb formában reprodukálják TAMÁSSY /1963/ és TAMÁSSY /1969/ ill. TAMÁSSY /1972/ megfelelő eredményeit.

—— . ——

Megmutatjuk végül, hogy dekomponálható lineáris tenzori konnexió görbületi <u>formája</u> ugyanolyan tipusu "dekompoziciós törvény"-nek engedelmeskedik, mint a konnexió; nevezetesen érvényes a

<u>**34. állitás**</u> Tegyük föl, hogy a $\xi = \xi^1 \otimes \xi^2$ tenzornyalábon adott ∇ lineáris tenzori konnexió dekomponálódik a ξ^1 -en adott $\overset{1}{\nabla}$ és a ξ^2 -n adott $\overset{2}{\nabla}$ lineáris konnexiókra. Legyen ∇, $\overset{1}{\nabla}$ és $\overset{2}{\nabla}$ görbületi formája rendre $\widetilde{R}$, $\overset{1}{\widetilde{R}}$, $\overset{2}{\widetilde{R}}$! Ekkor $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(B)$, $\sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi^1$, $\tau \in \mathrm{Sec}\,\xi^2$ esetén fennáll az

$$\underline{\widetilde{R}(X,Y)(\sigma \otimes \tau) = \overset{1}{\widetilde{R}}(X,Y)(\sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes \overset{2}{\widetilde{R}}(X,Y)(\tau)}$$

összefüggés.

Bizonyitás. A 19. definició és a dekomponálhatóságra a 3. tétel a/ részében megfogalmazott kritérium ismételt alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}(X,Y)(\sigma\otimes\tau)=\nabla_X[\nabla_Y(\sigma\otimes\tau)]-\nabla_Y[\nabla_X(\sigma\otimes\tau)]-\nabla_{[X,Y]}(\sigma\otimes\tau)=\\
&=\nabla_X((\overset{1}{\nabla}_Y\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_Y\tau)-\nabla_Y((\overset{1}{\nabla}_X\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_X\tau)-(\overset{1}{\nabla}_{[X,Y]}\sigma)\otimes\tau-\\
&-\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_{[X,Y]}\tau=\overset{1}{\nabla}_X(\overset{1}{\nabla}_Y\sigma)\otimes\tau+\overset{1}{\nabla}_Y\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_X\tau+\overset{1}{\nabla}_X\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_Y\tau+\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_X\overset{2}{\nabla}_Y\tau-\\
&-\overset{1}{\nabla}_Y(\overset{1}{\nabla}_X\sigma)\otimes\tau-\overset{1}{\nabla}_X\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_Y\tau-\overset{1}{\nabla}_Y\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_X\tau-\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_Y\overset{2}{\nabla}_X\tau-(\overset{1}{\nabla}_{[X,Y]}\sigma)\otimes\tau-\\
&-\sigma\otimes\overset{2}{\nabla}_{[X,Y]}\tau=(\overset{1}{\nabla}_X\circ\overset{1}{\nabla}_Y-\overset{1}{\nabla}_Y\circ\overset{1}{\nabla}_X-\overset{1}{\nabla}_{[X,Y]})(\sigma)\otimes\tau+\\
&+\sigma\otimes(\overset{2}{\nabla}_X\circ\overset{2}{\nabla}_Y-\overset{2}{\nabla}_Y\circ\overset{2}{\nabla}_X-\overset{2}{\nabla}_{[X,Y]})(\tau)=\underline{\overset{1}{\widetilde{R}}(X,Y)(\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes\overset{2}{\widetilde{R}}(X,Y)(\tau)}.
\end{aligned}$$

Következmény. Ha a ∇ lineáris tenzori konnexió dekomponálódik a $\overset{1}{\nabla}$ és $\overset{2}{\nabla}$ lineáris konnexiókra, akkor a megfelelő görbületi formák komponensfüggvényeinek kapcsolatát az

$$\underline{\widetilde{R}_{ij}{}^{\alpha\lambda}{}_{\beta\mu}=\overset{1}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\alpha}{}_{j\beta}\overset{(2)}{\delta}{}^{\lambda}_{\mu}+\overset{2}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\lambda}{}_{j\mu}\overset{(1)}{\delta}{}^{\alpha}_{\beta}}$$

összefüggés adja.

Bizonyitás. A szóbanforgó komponensfüggvények a 28. állitás bizonyitásában látottak értelmében /ill. abból következően/ rendre az

$$\overset{1}{\widetilde{R}}(X,Y)(\sigma)=X^iY^j\overset{1}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\alpha}{}_{j\beta}\sigma^\beta e_\alpha\,,\quad \overset{2}{\widetilde{R}}(X,Y)(\tau)=X^iY^j\overset{2}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\mu}{}_{j\varsigma}\tau^\varsigma f_\mu\,,$$

$$\widetilde{R}(X,Y)(\sigma\otimes\tau)=X^iY^j\widetilde{R}_{ij}{}^{\alpha\mu}{}_{\beta\varsigma}\sigma^\beta\tau^\varsigma e_\alpha\otimes f_\mu$$

relációk szerinti kapcsolatban állnak a görbületi formákkal, igy a most igazolt állitás alapján

$$\begin{aligned}
&X^iY^j\widetilde{R}_{ij}{}^{\alpha\mu}{}_{\beta\varsigma}\sigma^\beta\tau^\varsigma e_\alpha\otimes f_\mu=\\
&=X^iY^j(\overset{1}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\alpha}{}_{j\beta}\sigma^\beta\tau^\varsigma\overset{(2)}{\delta}{}^{\mu}_{\varsigma}e_\alpha\otimes f_\mu+\overset{2}{\widetilde{R}}{}_{i}{}^{\mu}{}_{j\varsigma}\sigma^\beta\tau^\varsigma\overset{(1)}{\delta}{}^{\alpha}_{\beta}e_\alpha\otimes f_\mu)
\end{aligned}$$

irható, ahonnan a megadott összefüggés következik.

Megjegyzések.

1/ Figyelembevéve, hogy a 27. állitás szerint $\widetilde{R} \in A^2(B; L_\xi)$ s alkalmazva a $\boxtimes$ operációnak azt az általánositását, amelynek lehetőségét a 22. definiciót követő 1/ megjegyzésben jeleztük, a görbületi forma dekomponálhatóságára a konnexió dekomponálódását értelmező összefüggéssel /ld. 22. definició/ pontosan analóg formula is nyerhető, ezzel kapcsolatban azonban a [GHV] monográfiára utalunk /Vol.II., p.328./.

2/ A görbületi formák komponensfüggvényei közötti kapcsolat közvetlenül leszármaztatható explicit alakjuk /ld. ismét a 28. állitás bizonyitását!/ és a dekomponálhatóságot lokálisan jellemző reláció /3. tétel, b// figyelembevételével. - Hasonló kérdéseket is érint a nemlineáris esetben TAMÁSSY-TU /1975/.

III. FÜGGELÉK

1. Majdnem-komplex struktura

A II./4. fejezet 3/ megjegyzését egésziti ki az

1. állitás Legyen adva a B n -dimenziós bázissokaság fölött a $\xi = (E, \pi, B, F)$ n -rangu vektornyaláb. Ekkor tetszőleges $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow{d\pi} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés majdnem-komplex strukturát indukál τ_E -n.

Bizonyitás. Vegyük alapul egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezet projekció-inverzén az $y^1, \dots, y^n, y^{n+1}, \dots, y^{2n} = \{y^i, y^{n+i}\}$ szokásos koordinátarendszert s tetszőleges $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ esetén tekintsük $T_z(E)$ $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma_i^j(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_z, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z \right\}$ adaptált bázisát. Értelmezzük a

$$J : \tau_E \longrightarrow \tau_E, \quad z \in E \longmapsto J_z \in L[T_z(E), T_z(E)]$$

endomorfizmust lokálisan - tehát $T(\pi^{-1}(\mathcal{U}))$ fölött - a

$$J_z\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h\right] = J_z\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z - \Gamma_i^k(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+k}}\right)_z\right] \doteq \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z,$$

$$J_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z \doteq -\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + \Gamma_i^k(z)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+k}}\right)_z = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h$$

előirással! Ekkor

$$J_z^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h\right] = J_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h,$$

$$J_z^2\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z = J_z\left(-\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_z^h\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+i}}\right)_z,$$

amiből az állitás helyessége világos. ▨

Megjegyzések.

1/ Konstrukciónk szerint J_z -t az adaptált bázisban a

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & -1 \\ & ⋰ & \\ -1 & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right] & \begin{matrix} n \\ \\ n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \quad n \end{matrix} & \end{array} \qquad 2n \times 2n$$

tipusu matrix irja le.

Egyszerü számitás mutatja, hogy J_z -t $T_z(E)$

$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_z, \left(\frac{\partial}{\partial y^{n+1}}\right)_z, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{2n}}\right)_z$ standard bázisára

vonatkozóan a

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} -\Gamma^k_i & -\delta^k_i \\ \Gamma^j_i \Gamma^k_j + \delta^k_i & \Gamma^k_i \end{array}\right] & \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \qquad n \end{matrix} & \end{array}$$

matrix reprezentálja.

2/ A II./4. alfejezet 1. példájában mondottak szerint J egyuttal F -struktura is τ_E -n. - F struktura egzisztenciáját AKO /1966/ un. hiper-érintőnyaláb / τ_E -t résznyalábként tartalmazó vektornyaláb/ alapulvételével igazolja. A most alkalmazott meggondolással könnyen kimutatható: ha ξ $(n+m)$ -rangu $(m \in \mathbb{N})$ vektornyaláb az n -dimenziós B bázissokaság fölött, akkor minden $0 \longrightarrow V_\xi \xrightarrow{i}$ $\xrightarrow{i} \tau_E \xrightarrow[\in \mathcal{H}]{d\pi} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés F -strukturát indukál τ_E -n.

2. A konnexióleképezés egy alkalmazása

Egy $T \in \mathcal{H}^1_1(B)$ tenzormezőt egy τ_B -n adott ∇ Koszul-konnexióra vonatkozóan akkor szokás párhuzamosnak nevezni, ha $\forall\, X \in \mathcal{H}(B)$: $\nabla_X T = 0$, ill.-ami ezzel ekvivalens - ha $\forall\, X, Y \in \mathcal{H}(B)$: $\nabla_X [T(Y)] = T(\nabla_X Y)$. - CADDEO

/1979/ szerint ez pontosan akkor áll fönn, ha $\underline{K \circ dT = T \circ K}$, ahol K a ∇ -hoz tartozó konnexióleképezés. Ez a geometriailag igen érdekes szituáció azonban lényegesen általánosabb feltételek mellett is vizsgálható:

__2. állítás__ Legyen adva a $\xi = (E, \pi, B, F)$ vektornyaláb s a $0 \longrightarrow V_E \xrightarrow{i} \tau_E \underset{\mathcal{H}}{\overset{\widetilde{d\pi}}{\rightleftarrows}} \pi^*(\tau_B) \longrightarrow 0$ horizontális leképezés. Jelölje K és ∇ a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó konnexióleképezést ill. általános konnexiót, legyen végül $\varphi : \xi \to \xi$ egy nyalábleképezés.

$$\underline{\varphi \circ K = K \circ d\varphi \iff \forall \sigma \in \mathrm{Sec}\,\xi,\ X \in \mathcal{X}(B):\ \nabla_X(\varphi \circ \sigma) = \varphi \circ \nabla_X \sigma.}$$

__Bizonyitás__. Alapulvéve egy $\mathcal{U} \subset B$ trivializáló környezetet s ennek projekció-inverzén a szokásos koordinátarendszert, lokális megfontolásokat végzünk.

a/ __φ és $d\varphi : \tau_E \longrightarrow \tau_E$ lokális leirása__

Mivel /ld. II./3. lemma!/ $\{y^{n+\alpha}\}$ ill. $\{e_\alpha(x)\}$ $(\alpha = 1, \dots, r)$ koordinátarendszere ill. bázisa F_x -nek,

$$\varphi : E \longrightarrow E, \quad z \in F_x \longmapsto \varphi(z) = \varphi\left(y^{n+\alpha}(z) e_\alpha(x)\right) =$$
$$= y^{n+\alpha}(z)\,\varphi(e_\alpha(x)) = y^{n+\alpha}(z)\,\varphi_\alpha^\beta(x)\,e_\beta(x)$$

irható, s igy a $\varphi_\alpha^\beta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, r)$ függvényekhez, φ $\mathcal{U}$ fölötti __komponensfüggvényeihez__ jutunk.

$$(d\varphi)_z : T_z(E) \longrightarrow T_{\varphi(z)}(E), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z \longmapsto (d\varphi)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z ;$$

$$\left[(d\varphi)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right](y^k) = \frac{\partial(y^k \circ \varphi)}{\partial y^i}(z) = \delta_i^k, \quad \text{ui} \quad \varphi(z) \in F_x \Rightarrow$$

$$\forall z \in F_x :\ y^k[\varphi(z)] = x^k \circ \pi(\varphi(z)) = x^k \circ \pi(z) = y^k(z);$$

$$\left[(d\varphi)_z \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z\right](y^{n+\alpha}) = \frac{\partial(y^{n+\alpha} \circ \varphi)}{\partial y^i}(z) = \left[y^{n+\beta}\left(\frac{\partial \varphi_\beta^\alpha}{\partial x^i} \circ \pi\right)\right](z),$$

mert $\forall z \in F_x$: $y^{n+\alpha}[\varphi(z)] = y^{n+\alpha}[y^{n+\beta}(z)\varphi^{\delta}_{\beta}(x)e_{\delta}(x)] =$
$= y^{n+\beta}(z)\,\varphi^{\delta}_{\beta}(x)\,\delta^{\alpha}_{\delta} = y^{n+\beta}(z)\,\varphi^{\alpha}_{\beta}(x) \Longrightarrow y^{n+\alpha}\circ\varphi = y^{n+\beta}(\varphi^{\alpha}_{\beta}\circ\pi).$

Ilymódon

$$(d\varphi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(z)} + y^{n+\beta}(z)\,\frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^i}(x)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\varphi(z)} \quad (x=\pi(z)) \qquad /1/$$
$$(i=1,\dots,n).$$

Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$(d\varphi)_z\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z = (\varphi^{\alpha}_{\beta}\circ\pi)\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\circ\varphi\right)(z) \quad (\beta=1,\dots,r). \qquad /2/$$

b/ Legyen $\sigma=\sigma^{\alpha}e_{\alpha}$ tetszőleges $\mathcal{U}$ fölötti metszet!
- A II./20. állítás értelmében $\nabla_X\sigma = X^i\left(\frac{\partial\sigma^{\beta}}{\partial x^i} + \Gamma^{\beta}_i\circ\sigma\right)e_{\beta}$,
így $\forall\, x\in\mathcal{U}$: $\varphi[(\nabla_X\sigma)(x)] = X^i(x)\left[\frac{\partial\sigma^{\beta}}{\partial x^i}(x) + \Gamma^{\beta}_i(\sigma(x))\right]\varphi[e_{\beta}(x)] =$

$= X^i(x)\left[\frac{\partial\sigma^{\beta}}{\partial x^i}(x) + \Gamma^{\beta}_i(\sigma(x))\right]\varphi^{\alpha}_{\beta}(x)\,e_{\alpha}(x)$. - A

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}"] & \pi^{-1}(\mathcal{U}) \\
\mathcal{U} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, dashed, "\varphi|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}\circ\sigma \doteq \varphi\circ\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

diagramból is kiolvashatóan $\varphi\circ\sigma$ ugyancsak $\mathcal{U}$ fölötti metszete ξ -nek, amelynek komponensfüggvényei

$(\varphi\circ\sigma)^{\alpha} = \sigma^{\beta}\varphi^{\alpha}_{\beta} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha=1,\dots,r)$, tekintettel arra, hogy $\forall\, x\in\mathcal{U}$: $(\varphi\circ\sigma)(x) = \varphi(\sigma^{\beta}(x)e_{\beta}(x)) =$
$= \sigma^{\beta}(x)\,\varphi^{\alpha}_{\beta}(x)\,e_{\alpha}(x)$. Ennek figyelembevételével

$$\nabla_X(\varphi\circ\sigma) = X^i\left[\frac{\partial(\varphi\circ\sigma)^{\alpha}}{\partial x^i} + \Gamma^{\alpha}_i\circ(\varphi\circ\sigma)\right]e_{\alpha} = X^i\left(\frac{\partial\sigma^{\beta}}{\partial x^i}\varphi^{\alpha}_{\beta} + \frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^i}\sigma^{\beta} + \Gamma^{\alpha}_i\circ(\varphi\circ\sigma)\right)e_{\alpha},$$

következésképpen

$$\varphi\circ\nabla_X\sigma = \nabla_X(\varphi\circ\sigma) \Longleftrightarrow \frac{\partial\varphi^{\alpha}_{\beta}}{\partial x^i}\sigma^{\beta} + \Gamma^{\alpha}_i\circ(\varphi\circ\sigma) - \varphi^{\alpha}_{\beta}(\Gamma^{\beta}_i\circ\sigma) = 0 \qquad /3/$$
$$(i=1,\dots,n;\ \alpha=1,\dots,r).$$

c/ A II./12. állitás alapján $\forall\, a = a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_z + a^{n+\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\beta}}\right)_z \in T_z(E)$:

$K_z(a) = \left(a^{n+\beta} + a^i\Gamma^\beta_i(z)\right)e_\beta(x) \qquad /x = \pi(z)/$; innen

$\varphi[K_z(a)] = \left(a^{n+\beta} + a^i\Gamma^\beta_i(z)\right)\varphi(e_\beta(x)) = \varphi^\alpha_\beta(x)\left(a^{n+\beta} + a^i\Gamma^\beta_i(z)\right)e_\alpha(x)$.

Másfelől /1/ és /2/ alkalmazásával

$$K_{\varphi(z)}\left[(d\varphi)_z(a)\right] = K_{\varphi(z)}\Big[a^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi(z)} +$$

$$+\left[a^i y^{n+\beta}(z)\frac{\partial\varphi^\alpha_\beta}{\partial x^i}(x) + a^{n+\beta}\varphi^\alpha_\beta(x)\right]\left(\frac{\partial}{\partial y^{n+\alpha}}\right)_{\varphi(z)}\Big] =$$

$$= \left[a^i y^{n+\beta}(z)\frac{\partial\varphi^\alpha_\beta}{\partial x^i}(x) + a^{n+\beta}\varphi^\alpha_\beta(x) + a^i\Gamma^\alpha_i(\varphi(z))\right]e_\alpha(x) \implies$$

$$\varphi[K_z(a)] = K_{\varphi(z)}\left[(d\varphi)_z(a)\right] \iff \frac{\partial\varphi^\alpha_\beta}{\partial x^i}(x)y^{n+\beta}(z) + \Gamma^\alpha_i(\varphi(z)) - \varphi^\alpha_\beta(x)\Gamma^\beta_i(z) = 0\,. \qquad /4/$$

/3/ és /4/ összevetése állitásunkat adja.

3. Tenzornyalábhoz csatolt principális nyaláb

Hozzávetőlegesen teljessé tesszük a fibrált nyalábok I. fejezetben megkezdett áttekintését s röviden szólunk a principális nyalábokról is. Ezek alapulvételével ismeretes módon a teljes konnexióelmélet - a Finsler-konnexiókkal egyetemben! - kiépithető. A téma legátfogóbb földolgozását a [KN] monográfia nyujtja, speciálisan a Finsler-konnexiók elméletét Makoto MATSUMOTO dolgozta ki ebben a fölfogásban. A tenzori konnexiók elmélete is kifejthető ilyen alapon, itt azonban csupán egyetlen, ebből a szempontból érdekes problémára térünk ki: a tenzornyalábhoz csatolt repernyaláb redukciójának kérdését vizsgáljuk meg.

1. definíció A $\mathcal{G}$ halmaz Lie-csoport, ha egyidejüleg csoport és sokaság s a $\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$, $(x,y)\longmapsto xy$ szorzás valamint a $\mathcal{G}\to\mathcal{G}$, $x\longmapsto x^{-1}$ inverzképzés differenciálható leképezés. Lie-csoportok közötti $\varphi:\mathcal{G}\to H$ leképezés Lie-csoport-homomorfizmus, ha differenciálható csoport-homomorfizmus. Egy $\mathcal{G}$ Lie-csoport Lie-részcsoportja olyan (φ,K) pár, ahol K Lie-csoport, $\varphi: K\to\mathcal{G}$ pedig injektiv Lie-csoport-homomorfizmus.

Megjegyzés. Belátható, hogy ha (φ,K) Lie-részcsoportja $\mathcal{G}$ -nek, akkor a φ leképezés beágyazás, viszont K nem szükségképpen részsokasága $\mathcal{G}$ -nek! /A megfelelő értelmezéseket illetően I.3.1. B -re utalunk vissza./

1. példa. Ha F véges dimenziój u valós vagy komplex vektortér, akkor $GL(F)$ Lie-csoport.

3. állitás. /GL(F)$\otimes$ GL(F), i/ Lie-részcsoportja $GL(F\otimes F)$ -nek.

Bizonyitás. A I./5. állitásban már beláttuk, hogy $GL(F)\otimes GL(F)$ csoport. Annak igazolását illetően, hogy ez Lie-részcsoportja $GL(F\otimes F)$ -nek, HANGAN /1966/-ra utalunk.

2. definició. Egy $\mathcal{G}$ Lie-csoportnak egy M sokaságon való jobboldali hatásán /röviden: jobboldali $\mathcal{G}$ -hatáson/ olyan $T: M\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$, $(x,g)\longmapsto T(x,g)\doteq x\cdot g$ differenciálható leképezést értünk, amelynél

$$\forall\, g,h\in\mathcal{G},\ x\in M:\quad x\cdot(gh)=(x\cdot g)\cdot h\ \wedge\ x\cdot e = x$$ /$e\in\mathcal{G}$ az egységelem/. A T hatás $x\in M$ ponton átmenő orbitja az $x\cdot\mathcal{G}\doteq\{x\cdot g \mid g\in\mathcal{G}\}$ halmaz.

<u>4. állitás.</u> Legyen adva a $\mathcal{G}$ Lie-csoport M sokaságon való $T: M\times\mathcal{G}\to M$ jobboldali hatása. Ekkor

$\mathcal{G}_x \doteq \{g\in\mathcal{G} \mid x\cdot g = x\}$ zárt Lie-részcsoportja $\mathcal{G}$ -nek.

- Ezt a Lie-részcsoportot az x -beli <u>izotrópia-részcsoport</u>nak hivjuk s azt mondjuk, hogy a T hatás <u>szabad</u>, ha $\forall x\in M: \mathcal{G}_x = \{e\}$. ◉

<u>3. definició.</u> Legyen $\mathcal{G}$ Lie-csoport, $\mathcal{P} = (P, \pi, B, \mathcal{G})$ fibrált nyaláb és $T: P\times\mathcal{G}\to P$ jobboldali $\mathcal{G}$ -hatás P -n. - A $(\mathcal{P}, T)$ párt <u>principális $\mathcal{G}$ -nyalábnak</u> /röviden: <u>principális nyalábnak</u>/ nevezzük, ha $\mathcal{P}$ -nek van olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ un. <u>principális koordinátaelőállitása</u>, hogy $\forall \alpha\in A,\ x\in\mathcal{U}_\alpha,\ g, h\in\mathcal{G}:$ <u>$\psi_\alpha(x, gh) = \psi_\alpha(x, g)\cdot h$</u>.

Ekkor $\mathcal{G}$ -t a principális nyaláb <u>strukturális csoport</u>jának hivjuk.

Az értelmezés alapján közvetlenül adódik, hogy

1/ $\forall z\in P,\ g\in\mathcal{G}:\ \pi(z\cdot g) = \pi(z)$;

2/ a strukturális csoport <u>szabadon hat</u> a totáltéren;

3/ a T hatás $z\in P$ -n átmenő orbitja éppen a z -t tartalmazó fibrum.

<u>Megállapodás.</u> $(\mathcal{P}, T)$ principális nyaláb helyett a továbbiakban többnyire $\mathcal{P}$ principális nyalábról szólunk.

<u>4. definició</u> Legyen $\hat{\mathcal{P}} = (\hat{P}, \hat{\pi}, B, K)$ principális nyaláb, $(\lambda, \mathcal{G})$ pedig K -nak Lie-részcsoportja.

- Azt mondjuk, hogy a K strukturális csoport $\mathcal{G}$ -re <u>redukálható</u>, ha van olyan $(\mathcal{P}, \varphi)$ pár, ahol

1/ $\mathcal{P} = (P, \pi, B, \mathcal{G})$ principális $\mathcal{G}$ -nyaláb;

2/ $\varphi: P \longrightarrow \hat{P}$ a bázistér identikus transzformációját indukáló fibrumtartó leképezés;

3/ $\forall\, g \in \mathcal{G},\ z \in P:\quad \varphi(z\cdot g) = \varphi(z)\cdot\lambda(g)$.

Ebben az esetben $\mathcal{P}$ -t <u>redukált nyalábnak</u> hivjuk.

— . —

Legyen $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ egy principális koordinátaelőállitás a $\mathcal{P} = (P, \pi, B, \mathcal{G})$ principális nyaláb számára, s tetszőleges $\alpha \in A$ esetén tekintsük a $\psi_\alpha: \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{G} \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ diffeomorfizmus $\chi_\alpha: \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{G}$ inverzét. Ekkor $\forall\, z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\ :\ \chi_\alpha(z) = (x, \bar{\Phi}_\alpha(z))$ $/x = \pi(z)/$, miáltal egy $\bar{\Phi}_\alpha: \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{G}$ leképezéshez jutunk. Véve egy $g \in \mathcal{G}$ elemet, a $\mathcal{G}$ -hatás és principális koordinátaelőállitás tulajdonságainak fölhasználásával

$$\chi_\alpha(z\cdot g) = (x, \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g)) \Rightarrow \psi_\alpha[\chi_\alpha(z\cdot g)] = z\cdot g = \psi_\alpha(x, \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g))$$

$$\Rightarrow z = \psi_\alpha(x, \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g))\cdot g^{-1} = \psi_\alpha(x, \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g)\cdot g^{-1}) \Rightarrow$$

$\underline{\chi_\alpha(z) = (x, \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g)\cdot g^{-1})}$ irható, amiből $\bar{\Phi}_\alpha(z) = \bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g)\cdot g^{-1}$ következik, tehát

$$\forall\, z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),\ g \in \mathcal{G}:\quad \underline{\bar{\Phi}_\alpha(z\cdot g) = \bar{\Phi}_\alpha(z)\cdot g}. \qquad /5/$$

/5/-ből közvetlenül adódik, hogy a

$$g_{\alpha\beta}: \mathcal{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathcal{G},\ x \longmapsto g_{\alpha\beta}(x) \doteq \bar{\Phi}_\alpha(z)[\bar{\Phi}_\beta(z)]^{-1}\quad (z \in \pi^{-1}(x))$$

előirás "korrekt" módon definiálja a $g_{\alpha\beta}$ leképezéseket, amelyeket az $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ principális koordinátaelőállitáshoz tartozó <u>koordinátatranszformációknak</u> hivunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy a koordinátatranszformációk eleget tesznek a

$$g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\varkappa}(x)\, g_{\varkappa\beta}(x) \qquad (x \in \mathcal{U}_{\alpha\beta\varkappa})$$

kociklus-feltételnek.

5. állítás. A $\hat{\mathcal{P}} = (\hat{P}, \hat{\pi}, B, K)$ principális nyaláb strukturális csoportja akkor és csak akkor redukálható a $(\lambda, \mathcal{G})$ Lie-részcsoportra, ha $\hat{\mathcal{P}}$ -nak van olyan $\{(\mathcal{U}_\alpha, \hat{\psi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ principális koordinátaelőállitása, amelyhez értéküket $\lambda(\mathcal{G})$ -ben fölvevő koordinátatranszformációk tartoznak. Amennyiben $\mathcal{P} = (P, \pi, B, \mathcal{G})$ a redukált nyaláb, $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ egy principális koordinátaelőállitás $\mathcal{P}$ számára és az $f_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \longrightarrow \hat{\pi}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ leképezéseket a

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{G} \\ {\scriptstyle f_\alpha} \vdots & & \downarrow {\scriptstyle j} \\ \hat{\pi}^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \xleftarrow{\hat{\psi}_\alpha} & \mathcal{U}_\alpha \times K \end{array} \qquad , \qquad j[(x,g)] \doteq (x, \lambda g)$$

diagram értelmezi, ugy az $f : P \longrightarrow \hat{P},\ \forall \alpha \in A : f|_{\mathcal{U}_\alpha} \doteq f_\alpha$ leképezés beágyazás.

Bizonyitás. Ld. [KN] , Vol.I. p. 53.

—— . ——

2. példa Vegyük alapul a $\xi = (E, \varrho, B, F)$ r -rangu vektornyalábot, s tegyük föl, hogy $\{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ egy vektornyaláb-koordinátaelőállitás ξ számára. Jelentse $\mathcal{I}z(F; F_x)$ az összes $F \xrightarrow{\cong} F_x$ lineáris izomorfizmusok halmazát, legyen

$P \doteq \bigcup_{x \in B} \mathcal{I}z(F; F_x)$; $\pi : E \longrightarrow B,\ z \in \mathcal{I}z(F; F_x) \longmapsto \pi(z) \doteq x$.

- A VB.3. axióma szerint /ld. I./5.def./ $\forall \alpha \in A,\ x \in \mathcal{U}_\alpha$: $\psi_{\alpha,x} \in \mathcal{I}z(F; F_x)$. Tekintsük a

$$\varphi_{\alpha,x} : GL(F) \longrightarrow \mathcal{I}z(F; F_x),\ \varphi \longmapsto \varphi_{\alpha,x}(\varphi) \doteq \psi_{\alpha,x} \circ \varphi$$

leképezéseket! Ekkor a

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times GL(F) \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),\ (x,\varphi) \longmapsto \varphi_\alpha(x,\varphi) \doteq \varphi_{\alpha,x}(\varphi) = \psi_{\alpha,x} \circ \varphi$$

leképezések nyilván bijekciók és

$$\forall x \in \mathcal{U}_{\alpha\beta},\ \varphi \in GL(F):\quad \underline{\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta(x,\varphi) = (x, \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ \varphi)},$$

hiszen ha mindkét oldalra alkalmazzuk a φ_α bijekciót, akkor a bal- és jobboldal egyaránt $\varphi_\beta(x,\varphi)$ -be megy át /az utóbbi $\varphi_\alpha(x, \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ \varphi) \doteq \varphi_{\alpha,x}(\psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ \varphi) = \psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\alpha,x}^{-1} \circ \psi_{\beta,x} \circ \varphi = \psi_{\beta,x} \circ \varphi = \varphi_{\beta,x}(\varphi)$ miatt/. Következik ilymódon, hogy a

$$\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times GL(F) \longrightarrow \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times GL(F)$$

leképezések <u>diffeomorfizmusok</u>. Mindezek alapján az 1. konstrukciós lemmára való hivatkozással megállapithatjuk: $\mathcal{P} = (P, \pi, B, GL(F))$ <u>fibrált nyaláb</u>. - Tekintsük végül a

$$T : P \times GL(F) \longrightarrow P,\ (z,\varphi) \longmapsto T(z,\varphi) = z\cdot\varphi \doteq z\circ\varphi$$

leképezést. Könnyen látható, hogy T jobboldali $GL(F)$ -hatás P -n; differenciálhatósága pl. az egyszerüen verifikálható

$$\varphi_\alpha(x,\varphi)\cdot\varphi_1 = \varphi_\alpha(x, \varphi\circ\varphi_1) \quad (x \in \mathcal{U}_\alpha;\ \varphi, \varphi_1 \in GL(F))$$

összefüggésből adódik, aminek alapján egyszersmind az is világos, hogy $(\mathcal{P}, T)$ $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ principális koordinátaelőállitással rendelkező $GL(F)$ -nyaláb.

Rögzitve az F vektortér egy $e_1, \ldots, e_r$ bázisát, a $\varphi_x \in \mathrm{Is}(F; F_x) = \pi^{-1}(x) \longmapsto (\varphi_x(e_1), \ldots, \varphi_x(e_r))$ leképezés <u>bijekció</u> $\mathrm{Is}(F, F_x) = \pi^{-1}(x)$ és az $F_x = \xi^{-1}(x)$ fibrum <u>összes</u> bázisai között; erre tekintettel a most megkonstruált principális nyalábot a ξ <u>vektornyalábhoz csatolt repernyalábnak</u>, röviden <u>repernyalábnak</u> nevezzük.

Lemma. Ha $\xi=(E,\varsigma,B,F)$ vektornyaláb az $\mathfrak{A}=\{(\mathcal{U}_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ vektornyaláb-koordinátaelőállítással és $\mathcal{P}=(P,\pi,B,GL(F))$ a ξ -hez csatolt repernyaláb

$$\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A},\ \varphi_\alpha:\mathcal{U}_\alpha\times GL(F)\longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha),\ (x,\varphi)\longmapsto \varphi_\alpha(x,\varphi)=\psi_{\alpha,x}\circ\varphi$$

principális koordinátaelőállítással, akkor az ehhez tartozó koordinátatranszformációk éppen az $\mathfrak{A}$ -kociklust alkotják.

Bizonyitás. A 4. definiciót követően bevezetett $\Phi_\alpha:\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\longrightarrow GL(F)$ függvények segitségével, tekintettel a csatolt repernyaláb iménti konstrukciójára, tetszőleges $x\in\mathcal{U}_\alpha$, $z\in \mathrm{Iz}(F,F_x)$ esetén $z=\varphi_\alpha(x,\Phi_\alpha(z))=\varphi_{\alpha,x}[\Phi_\alpha(z)]=$ $=\psi_{\alpha,x}\circ\Phi_\alpha(z)$ irható, amiből $\Phi_\alpha(z)=\psi_{\alpha,x}^{-1}\circ z$ adódik. Igy az $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ -hoz tartozó koordinátatranszformációk

$$g_{\alpha\beta}:\mathcal{U}_{\alpha\beta}\longrightarrow GL(F),\ x\longmapsto g_{\alpha\beta}(x)\doteq\Phi_\alpha(z)[\Phi_\beta(z)]^{-1}=$$
$$=\psi_{\alpha,x}^{-1}\circ z\circ z^{-1}\circ\psi_{\beta,x}=\psi_{\alpha,x}^{-1}\circ\psi_{\beta,x},$$

s ez volt az állitás.

TÉTEL. Kiindulva a $\xi=(E,\varsigma,B,F)$ vektornyalábból, tekintsük a $\xi\otimes\xi$ tenzornyalábot s az ehhez csatolt $\hat{\mathcal{P}}=(\hat{P},\hat{\pi},B,GL(F\otimes F))$ repernyalábot. - $\hat{\mathcal{P}}$ strukturális csoportja redukálódik az $/\,i,\ GL(F)\otimes GL(F)\,/$ Lie-részcsoportra, a $\mathcal{P}=(P,\pi,B,GL(F)\otimes GL(F))$ redukált nyaláb totáltere pedig az összes $F_x\otimes F_x$ fibrumok dekomponálható tenzorok alkotta összes bázisainak halmazával azonosítható.

Bizonyitás. Legyen $\{(\mathcal{U}_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ egy vektornyaláb-koordinátaelőállitás ξ számára, konstruáljuk meg ebből $\xi\otimes\xi$ -

nek az I./9. állitásban leirt $\mathfrak{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koordinátaelőállitását s tekintsük a $\hat{\mathcal{P}}$ repernyaláb $\mathfrak{A}$ -nak megfelelő $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ principális koordinátaelőállitását. Ehhez az iménti lemma értelmében éppen az $\mathfrak{A}$ -kociklus elemei tartoznak koordinátatranszformációkként, amelyek - ugyancsak az I./9. állitás szerint - $GL(F)\otimes GL(F)$ ben veszik föl értékeiket. Igy az 5. állitás alapján $GL(F\otimes F)$ $GL(F)\otimes GL(F)$ -re redukálható. Mivel a

$$\begin{tikzcd}
z = \varphi_\alpha \in \pi^{-1}(x) \subset \mathcal{P} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, dashed] & (x, \varphi_1 \otimes \varphi_1) \in \mathcal{U}_\alpha \times GL(F)\otimes GL(F) \arrow[d] \\
\hat{z} \in \hat{\pi}^{-1}(x) \subset \hat{\mathcal{P}} & (x, \varphi_1 \otimes \varphi_2) \in \mathcal{U}_\alpha \times GL(F\otimes F) \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

diagram szerint értelmezett $\mathcal{P} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}}$, $z \longmapsto \hat{z}$ beágyazásnál

$$\hat{z} = \varphi_\alpha(x, \varphi_1 \otimes \varphi_2) = \Psi_{\alpha,x} \circ \varphi_1 \otimes \varphi_2 = \psi_{\alpha,x} \otimes \psi_{\alpha,x} \circ \varphi_1 \otimes \varphi_2 =$$
$$= \psi_{\alpha,x} \circ \varphi_1 \otimes \psi_{\alpha,x} \circ \varphi_2 ,$$

az I./6. állitásra való hivatkozással következik a $\mathcal{P}$ redukált nyaláb totálterére adott interpretáció helyessége. ▨

IRODALOM

Könyvek

1. [Fl Kl] - P.Flaschel - W.Klingenberg: Riemannsche Hilbertmannigfaltigkeiten. Periodishe Geodätsche /Springer Verlag, Berlin, 1972/
2. [G] - C.Godbillon: Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique /Hermann, Paris, 1969./
3. [Greub1.] - W.Greub: Linear Algebra, 4th ed. /Springer Verlag, Berlin and New York, 1975./
4. [Greub2.] - W.Greub: Multilinear Algebra 2nd ed. /Springer Verlag, Berlin and New York, 1978./
5. [GHV] - W.Greub, S. Halperin, R.Vanstone: Connections, Curvature and Cohomology 3 vols. /Academic Press, New York, 1972., 1973., 1976./
6. [GKlM] - D.Gromoll, W.Klingenberg, W.Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen /Springer Verlag, Berlin, 1968./
7. [H] - F.Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry, 3rd ed. /Springer Verlag, Berlin--New York, 1966./
8. [KN] - S.Kobayashi, K.Nomizu: Foundations of Differential Geometry 2vols. /Wiley (Interscience), New York, 1963., 1969./
9. [Lang] - S.Lang: Introduction to Differentiable Manifolds 2nd ed. /Wiley (Interscience), New York 1972./
10. [Ma] - M.Matsumoto: Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces /megjelenőben/
11. [RF] - H.Rund., W.F.Forbes: Topics in Differential Geometry /In memory of Evan Tom Davies/ /Academic Press, New York-London, 1976./

12. [Sp] - M.Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vols 5. /Publish or Perish, Boston, 1970., 1975./

13. [St] - S.Sternberg: Lectures on Differential Geometry /Prentice Hall., Englewood Cliffs., New Jersey, 1964./

14. [YaI] - K.Yano - S.Ishihara: Tangent and Cotangent Bundles: Differential Geometry /Marcel Dekker, New York, 1973./

Cikkek

1. AKO /1966/ M.Ako: Non-linear connection in vector bundles /Ködai Mathematical Seminar Reports; Vol.18. 1966. pp. 307-316./

2. ANASTASIEI /1980/ M.Anastasiei: Generalized affine connections on Banach manifolds /Analele stiintifice ale Universitatii "Al.I.Cuza" din IASI; Tomul XXVI. 1980., pp. 381.-388./

3. ATIYAH /1957/ M.F.Atiyah: Complex analytic connections in fibre bundles /Transactions of the American Mathematical Society; Vol. 85. 1957. pp. 181-207./

4. BARTHEL /1963/ W.Barthel: Nichtlineare Zusammenhänge und deren Holonomiegruppen /Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 212, 1963. pp. 120-149./

5. BOMPIANI /1976/ E.Bompiani: Reminescences of E.T. Davies / [RF]-ben, pp. 9-14./

6. CADDEO /1979/ R.Caddeo: Il prolungamento al fibrato tangente delle connessioni di Schouten e di Vranceanu /Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome XXIV., 1979. pp. 339-345./

7. CLARK - BRUCKHEIMER /1960/ R.S.Clark - M.R.Bruckheimer: Sur les structures presque tangents /C.R. Acad. Sci. Paris 251., 1960. pp. 627-629./

8. DOMBROWSKI /1962/ P.Dombrowski: On the Geometry of the Tangent Bundle /Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 210., 1962. pp. 73-88./

9. EHRESMANN /1950/ C.Ehresmann: Les connexions infinitésimales dans un espace fibre différentiable /Colloque de Topologie, Bruxelles 1950., pp. 29-55./

10. ELIASSON /1967/ H.I. Eliasson: Geometry of Manifolds of Maps /Journal of Differential Geometry, Vol.I., 1967. pp. 169-194./

11. FRÖLICHER - NIJENHUIS /1956/ A.Frölicher - A.Nijenhuis: Theory of vector-valued differential forms I. / Indagationes Mathematicae Vol. XVIII. - Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings; Vol. LIX, Ser. A. - pp. 338-359./

12. GRIFONE /1972/ J.Grifone: Structure presque tangente et connexions /Annales de l'Institut Fourier /Grenoble/, Tome XXII., 1972. pp. 287-334./

13. HANGAN /1966/ Th. Hangan: Géométrie différentielle grassmannienne /Revue Roumanie de Mathématiques Pures et Appliquées, Tome XI., 1966. pp. 519-531./

14. HOKARI /1934/ S.Hokari: Über die Bivektorübertragung /Journal Fac. Sci. Hokkaido Univ. 2., 1934. pp.104-117./

15. IANUS /1973/ S.Ianus: Sulle strutture canoniche dello spazio fibrato tangente di une varieta riemanniana /Rendiconti di Matematica Roma, Serie /VI/, Vol.6., 1973. pp. 75-95./

16. IANUS-POPOVICI /1980/ S.Ianus - I.Povovici: On the Vranceanu's nonholonomic connection /Analele stiintifice ale Universitatii "Al. I. Cuza" din Iasi, Tomul XXIV., 1980. pp. 389-392./

17. IANUS - UDRISTE /1970/ S.Ianus - C.Udriste: Asupra spatiului fibrat tangent al unei varietati diferentiabile /Studii si Cercetari Matematice, Tomul 22., 1970. pp. 599-611./

18. KANDATU /1966/ A.Kandatu: Tangent Bundle of a Manifold with a non-linear Connection /Kōdai Mathematical Seminar Reports, Vol. 18., 1966. pp.259-270./

19. KLEIN-VOUTIER /1968/ J.Klein - A.Voutier: Formes extérieures génératrices de sprays /Annales de l'Institut Fourier, Tome XVIII., 1968. pp. 241-260./

20. MARCUS - MOYLS /1959/ M.Marcus - B.N.Moyls: Transformations on tensor product spaces /Pacific Journal of Math. 9., 1959. pp. 1215-1221/

21. SASAKI /1958/ S.Sasaki: On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds /Tohoku Mathematical Journal, Vol. X., 1958. pp. 338-354./

22. TAMÁSSY /1963/ Tamássy L.: Tenzoriálisan összefüggő terek ekvivalencia és görbület elméletéhez /MTA III. Osztályának Közleményei, XIII.kötet, 1963. pp.359-373./

23. TAMÁSSY /1969/ L.Tamássy: On nonlinear tensorial connexions /Publicationes Matematicae, Tomus 16., 1969. pp. 193-197./

24. TAMÁSSY /1972/ L.Tamássy: On extension and reduction of non-linear connections /Tensor, N.S., Vol.24., 1972. pp. 7-13./

25. TAMÁSSY - TU /1975/ L.Tamássy - Nguyen v. Tu: Absolute parallelism in non-linear reducible tensorial connections /Tensor, N.S., Vol. 29., 1975. pp.93-97./

26. VILMS /1968/ Jaak Vilms: Curvature of nonlinear connections /Proceedings of the American Math. Society, Vol. 19., 1968., pp. 1125-1129./

27. WALKER /1958/ A.G.Walker: Connexions for parallel distribution in the large /Quarterly Journal of Math. /Oxford//2/, Vol. IX. 1958. pp. 221-231./

28. WONG - MOK /1976/ Y.C.Wong - K.P.Mok: Connections and M- Tensors on the Tangent Bundle TM / [RF] -ben, pp. 157-172./

29. <u>YANO /1961/</u> K.Yano: On a structure satisfying $f^3 + f = 0$. /Techn. Rep. Univ. of Washington, No. 12. June 20. 1961./